

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

Le titre de DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Jean-Pierre LEPETIT

Ingénieur Civil des Ponts et Chaussées

1^{re} THÈSE : **Analogie entre les ondes de gravité et les ondes ultrasonores**

2^e THÈSE : *Propositions données par la Faculté*

Calcul numérique en mécanique des fluides

Soutenues le 19 décembre 1967, devant la Commission d'examen

Jury	{	MM. FORTIER	}	Président
		COMOLET		Examineurs
		SIESTRUNCK		
		VALEMBOIS		

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

Le titre de DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Jean-Pierre LEPETIT

Ingénieur Civil des Ponts et Chaussées

1^{re} THÈSE : **Analogie entre les ondes de gravité et les ondes ultrasonores**

2^e THÈSE : *Propositions données par la Faculté*

Calcul numérique en mécanique des fluides

Soutenues le 19 décembre 1967, devant la Commission d'examen

Jury	{	MM. FORTIER	}	Président
		COMOLET		Examineurs
		SIESTRUNCK		
		VALEMBOIS		

UNIVERSITE DE PARIS - FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

Professeurs

Le Doyen
M. ZAMANSKY

MM. PRENANT	T Anatomie & histologie comparée	M. LEVY	T Physique théorique des hautes énergies	MM. RIGAUDY	T Chimie SPCN
GRASSE	T Evolution des êtres organisés	Mme CHAIX	T Chimie biologique	COLLONGUES	T Chimie CPEM
PREVOST	T Chimie organique	MM. HUREL PY	T Biologie végétale CPEM	DUBERT	T Biochimie
WYART	T Minéralogie & cristallographie	PANNETIER	T Chimie générale I	NOZIERES	T Chimie générale
TEISSIER	T Zoologie	BRUN	T Mécanique des fluides I	CADIOT	T Chimie organique
AUGER	T Physique quantique & relativité	Mme DUBREIL	T Mathématiques (Agrégation)	IVANOFF	T Océanographie physique
MONNIER	T Physiologie générale	Mme LELONG	T Mathématiques II E.N.S.	FRANÇOIS	T Zoologie
PIVETEAU	T Paléontologie	MM. BELLAIR	T Géologie S.P.C.N.	TALBOT	T Génie chimique
ROCARD	T Physique E.N.S.	COTTE	T Physique électricité	Mme NOUGAREDE	T Botanique
CARTAN	T Mathématiques E.N.S.	DUBOIS J.E.	T Chimie organique physique	MM. BRUIAT	T Mathématiques MPC
LAFFITTE	T Chimie générale	LAMOTTE	T Zoologie E.N.S.	FOURNET	T Electricité générale
N.	T Géométrie supérieure	OLMER	T Energétique générale	DEMEUVELS	T Mathématiques propédeutique
COULOMB	T Physique du globe	GAUTHIER	T Mécanique appliquée	FURON	T Géologie SPCN
Mlle COUSIN	T Biologie animale SPCN	BARCHEWITZ	T Chimie physique	Mme GANS	T Génétique
MM. CHRETIEN	T Chimie minérale	BROSSEL	T Physique atomique	MM. GENEVEES	T Biologie végétale CPEM
BOCQUET	T Zoologie	BUSER	T Physiologie comparée	MM. HUPE	T Pétrographie
KASTLER	T Physique E.N.S.	CAMUS	T Physiologie végétale	HOLLANDE	T Biologie générale
EPHROSSI	T Génétique	CURIEN	T Minéralogie & cristallographie	LIONS	T Analyse numérique
GAUTHIERET	T Biologie végétale CPEM	POSSOMPES	T Zoologie	MAITTE	T Chimie organique
LUCAS R.	T Recherches physiques	PULLMANN	T Chimie quantique	NICOLAS	T Chimie organique
THOMAS A.	T Biologie cellulaire	TEILLAC	T Physique nucléaire & radio-activité	PANGEL	T Géologie appliquée
MORAND	T Physique enseignement	VILLE	T Econométrie	RAVIER	T Pétrographie
SOLEILLET	T Physique CPEM	WILLEMART	T Chimie CPEM	MOREL F.	T Physiologie comparée
FORTIER	T Mécanique expérimentale des fluides	FREYMANN	T Recherches physiques	ROSEAU	T Mécanique théorique des fluides
DRACH	T Zoologie	ROLLET	T Chimie minérale	ROUBINE	T Electronique E.S.E.
QUENEY	T Météorologie & dynamique de l'atmosphère	Mlle TOSSEN	T Chimie SPCN	SILBER	T Chimie CPEM
GALLIEN	T Embryologie	MM. CHEVALLEY	T Géométrie algébrique & théorie des groupes	UEBERSFELD	T Electronique
EICHORN	T Botanique	GERMAIN	T Mécanique théorique des fluides	HERVE	T Théories physiques
DE COGNAC	T Biologie végétale SPCN	LUCAS G.	T Géologie	Mme PECKER-WIMEL	T Mathématiques
Mlle CAUCHOIS	T Chimie physique	ALLARD	T Chimie physique	MM. BALKANSKI	T Astrophysique
MM. THELLIER	T Physique du globe	BERTHELOT	T Physique des particules fondamentales	LE CORRE	T Physique M.P.C.
PONCIN	T Mécanique générale	BRICARD	T Météorologie	NATAF	T Electricité
DUBREIL	T Arithmétique & théorie des nombres	Mme ALBE-FESSARD	T Psycho-physiologie	ECHALIER	T Physique nucléaire & radio-activité
QUELET	T Chimie organique	MM. JULIA	T Etude des molécules naturelles complexes	BARAUD	T Biologie animale CPEM
CAGNIARD	T Géophysique appliquée	MAGAT	T Biologie-chimie des rayonnements	DARS	T Physique CPEM
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire	Mlle QUINTIN	T Electrochimie	CAMEFORT	T Géologie structurale & appliquée
CUVILLIER	T Microbiologie	MM. MONOD	T Chimie du métabolisme	VICHNIEWSKY	T Botanique (agrégation)
JUNG	T Géologie	DE POSSEL	T Chimie du métabolisme	SIGWALT	T Mécanique industrielle
TRILLAT	T Microscopie & diffraction électronique	CHARLOT	T Analyse numérique	BLAQUIERE	T Chimie SPCN
WIEMANN	T Chimie organique & structurale	CHATELET	T Chimie analytique	BARUCH	T Electronique
VASSY	T Physique de l'atmosphère	MATTIER	T Chimie CPEM	ARNOS	T Physique théorique
DESTOUCHES	T Théorie physique	BOUSSIERES	T Physique SPCN	SLONIMSKI	T Génétique
AMIEL	T Chimie générale	Mme COUTURE	T Radiochimie	MALLIAVIN	T Mathématiques propédeutique
HOCART	T Minéralogie & cristallographie	MM. FRANC	T Thermodynamique & mécanique physique	GAUDEMAR	T Chimie propédeutique
J.P. MATHIEU	T Physique optique	SCHNELL	T Biologie animale CPEM	BROUSSE	T Mécanique théorique
COUTEAUX	T Cytologie	STOLKOWSKI	T Biologie tropicale	ROSCHE	T Astronomie
CHOQUET	T Théorie des fonctions & topologie	ACHER	T Physiologie générale	GUY	T Physique expérimentale
FELDMANN	T Biologie végétale marine	BAUDOUIN	T Chimie biologie	LAZARD	T Mathématiques MPC
JOST	T Physiologie comparée	BEAUMONT	T Biologie animale SPCN	MOREL P.	T Physique MPC
PORTET	T Calcul des probabilités & physique mathématiques	BLAMONT	T Géophysique ionosphère	ARSAC	T Chimie MPC
SCHWARTZ	T Calcul différentiel & intégral	BOURAU	T Chimie physique MGP	LEFEBVRE	T Chimie MPC
CHOUARD	T Physiologie végétale	CURIE D.	T Géologie	BOK	T Physique propédeutique
MALAYARD	T Aviation (technique aéronautique)	HELLER	T Physiologie végétale	CHAPEVILLE	T Biochimie
BRELOT	T Analyse supérieure	TORTRAT	T Calcul des probabilités	BNENOT	T Physique CPEM
NORMANT	T Synthèse organique	CAILLEUX	T Chimie SPCN	RIO	T Chimie CPEM
BENARD	T Chimie appliquée	MAGNAN	T Physique électricité	JAUSEN	T Géologie ENS
DUGUE	T Statistique mathématique	DAUDEL	T Mécanique ondulatoire	PREVOST G.	T Biologie végétale CPEM
SOULAIAC	T Psychophysique	Mlle FOURCROY	T Biologie végétale SPCN	FAVARD P.	T Biologie animale CPEM
ULRICH	T Physiologie végétale appliquée	Mme CHOQUET BRUHAT	T Mécanique analytique & mécanique	Mme CHARMAUX-COTTON	T Evolution des êtres organisés
KIRRMANN	T Théories chimiques	Mlle VEIL	T Physiologie générale	Mlle FICINI	T Chimie CPEM
CHADEFAUD	T Botanique	M. WLOFF	T Microbiologie	MM. LEQUEUX	T Astronomie
Mlle LE BRETON	T Physiologie de la nutrition	SIESTRUNK	T Mécanique physique & expérim.	COHEN TANNOUNI	T Physique atomique
MM. LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie	CAABANNES	T Mécanique générale	TAVERNIER	T Physique CPEM
DEVILLERS	T Anatomie & histologie comparées	CAIRE	T Géographie physique & géologie dynamique	DURAND Michel	T Biologie animale SPCN
EHRESMANN	T Topologie algébrique	COMOLET	T Mécanique des fluides	PAUCAUD	T Physiologie
FRANCON	T Physique SPCN	DELLLOUE	T Physique de l'exosphère	Mme PETIT	T Biologie animale CPEM
GLANGEAUX	T Géographie physique, géologie dynamique	HOULLON	T Biologie animale CPEM	MM. CAGNAC	T Physique agrégation
DODEMENT	T Mathématiques MGP	OLIVIERO	T Anthropologie	FALK-VAIRANT	T Physique nucléaire
PISOT	T Technique mathématique de la physique	SAMUEL	T Mathématiques (ENS Jeunes filles)	KRASNEN	T Mathématiques
ROCH	T Géologie	THIRY	T Mécanique céleste	BENZECRI	T Statistiques
SCHATZMANN	T Astrophysique	ABELES	T Physique SPCN	VINH MAU	T Physique M.G.P.
TERMIER	T Géologie générale	AMAT	T Thermodynamique	DUQUESNE	T Physique CPEM
ZAMANSKY	T Mathématiques générales	AUBOIN	T Géologie	SCRUTZENBERGER	T Physique CPEM
LENNUIER	T Physique M.G.P.	Mme BENOIT-GUEITAL	T Physique nucléaire & radio-activité	TREMLILLON	T Chimie MPC
ROUTHIER	T Géologie appliquée	M. BOUGIS	T Biologie végétale marine	FAYARD	T Chimie MPC
Mme TONNELAT	T Physique théorique			BUVET	T Chimie CPEM
MM. DIXMIER	T Mathématiques M.P.C.			AUTHIER	T Physique MPC
SOUCHAY	T Chimie générale			PICINBONO	T Physique CPEM
AGRAIN	T Electrotechnique			BONNEFILLE	T Electrotechnique
BRUSSET	T Chimie systématique			Mme PUISEUX DAO	T Biologie végétale

UNIVERSITE DE PARIS - FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

Professeurs

MM. MANCENOT G.	T Biologie végétale	MM. BERGERARD J.	T Zoologie	Mme MARTY N.	T Physique propédeutique
JACQUINOT P.	T Optique	ROGER J.	T Paléontologie	MM. GOURDIN M.	T Physique théorique
GUINER A.	T Electricité & physique des solides	LEFORT M.	T Chimie nucléaire	PEREZ-Y-JORBA	T Physique propédeutique
GRIVET P.	T Electronique	LAGARRIGUE A.	T Physique des hautes énergies	GROENFLOT E.	T Biologie végétale SPCN
BLANC		JULIEN J.	T Chimie structurale organique	RIOU M.	T Physique nucléaire
LAPIERRE A.	T Accélérateur linéaire	ARNULF A.	T Optique	BROUSSE R.	T Géologie S.P.C.N.
LHERITIER P.	T Génétique des virus	ROUAULT M.	T Optique électronique	LIOTTE C.	T Physiologie végétale
LEMEE G.	T Ecologie végétale	MARECHAL A.	T Optique théorique et appliquée	CLAUSER H.	T Chimie biologique
MOYSE A.	T Physiologie végétale	MAZET R.	T Mécanique générale	JANCOVICI B.	T Physique atomique
DODE M.	T Chimie thermodynamique	DAVID Serge	T Chimie agrégation	LURCAT J.	T Physique propédeutique
DENY J.	T Mathématiques	QUERIN H.	T Chimie des gaz et des combustibles	LE BERRE J.	T Entomologie
RIVIERE A.	T Géologie générale & sédimentologie	LESIEUR L.	T Mathématiques MPC et algèbre	LAVOREL J.	T Biophysique
MICHEL A.	T Chimie minérale	KOURGANOFF	T Astronomie	PERIO P.	T Physique propédeutique
MAY R.	T Anatomie comparée	ARNOULT P.	T Physique électronique	FETIZON M.	T Stéréochimie
DELANGE H.	T Mathématiques	KAHANE J.P.	T Mathématiques	CHEMLA M.	T Chimie des isotopes
CHAPPELLE J.	T Physique expérimentale	BROCHARD J.	T Physique propédeutique	MAZIERES C.	T Chimie SPCN
LACOMBE P.	T Métallurgie	Mme ROZEN	T Physique C.P.E.M.	VILKAS M.	T Chimie C.P.E.M.
BENOIT P.	T Physiologie générale	MM. BERTIN F.	T Electronique	BLANDIN A.	T Physique des solides
GUINOCHE J.	T Biologie végétale SPCN	MALGRANGE B.	T Mathématiques	BRUN G.	T Génétique
NERON A.	T Mathématiques	CORABOEUF E.	T Physiologie animale	MERCOURIOFF	T Physique agrégation
NOZIERAN R.	T Botanique approfondie	FRIEDEL J.	T Physique des solides	ANDRE J.	T Microscopie électronique
CASTAINO R.	T Thermodynamique	CHEVAUGOEN J.	T Cryptogamie	CHEVALLIER F.	T Physique animale
ELLENBERGER F.	T Géologie structurale	MEYER P.	T Physique théorique & atomique	MM. MARCOU	T Chimie cellulaire C.P.E.M.
LEDERER E.	T Chimie biologique	LEHMANN P.	T Accélérateur linéaire	MM. BOURDU R.	T Physiologie végétale
RIZET J.	T Génétique	CHABBAL R.	T Physique propédeutique	BERKALOFF A.	T Biologie animale CPEM
LENDER T.	T Biologie animale SPCN	DELCHROIX J.M.	T Physique des plasmas	Mlle LEFORT M.	T Biologie cellulaire CPEM
POPOU G.	T Mathématiques	CERF J.	T Mathématiques	Mme LAMBERT	T Physique C.P.E.M.
FREON P.	T Chimie organique	D'ESPAGNOFF	T Physique théorique	MM. BIZOT J.C.	T Physique M.P.C.
TONNELAT	T Biologie physico-chimique	SCHAEFFER P.	T Microbiologie	GIRAUD J.P.	T Mécanique
BRUNN Jan	T Géologie historique	DE GENNES P.	T Physique des solides	LABOUESSE B.	T Chimie SPCN
JEAN M.	T Physique nucléaire				

AVANT-PROPOS

Les travaux de cette thèse ont été effectués au Département Laboratoire National d'Hydraulique du Centre de Recherches et d'Essais d'Electricité de France à Chatou.

Nous rendons en premier lieu hommage à la mémoire de Monsieur Chapouthier, Inspecteur Général à l'Electricité de France, qui fut notre professeur d'Hydraulique à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et qui nous a fait découvrir le Centre de Recherches de Chatou.

Nous remercions Monsieur Chabert, Chef du Département Laboratoire National d'Hydraulique, de nous avoir donné les moyens de conduire notre étude dans le cadre de son Département.

Nous remercions Monsieur Bonnefille, Chef de la Division Hydraulique Maritime, de nous avoir suggéré le sujet de cette thèse, sujet ardu mais très intéressant, et Monsieur Daubert de s'y être intéressé.

Nous tenons à exprimer notre profonde et respectueuse gratitude à Monsieur le Professeur Fortier qui a accepté de diriger notre travail.

Notre respectueuse reconnaissance s'adresse également à Messieurs les Professeurs Comolet et Siestrunck ainsi qu'à Monsieur Valembois qui nous ont fait crédit en voulant bien siéger à la commission d'examen.

Enfin nos remerciements vont à l'ensemble du personnel du Centre de Chatou pour l'aide précieuse que nous avons reçue durant notre travail.



Digitized by the Internet Archive
in 2026



https://archive.org/details/IA41549022_0051

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
NOTATIONS	7
I - INTRODUCTION	9
II - GÉNÉRALITÉS SUR LA HOULE - CALCUL NUMÉRIQUE DE LA RÉFRACTION	11
1/ Mouvements ondulatoires de la mer	12
2/ Théories de la houle cylindrique en profondeur infinie ou constante	13
3/ Déformation de la houle au cours de sa propagation	20
4/ Réfraction de la houle. Tracé de plans de vagues par le calcul numérique	22
III - GÉNÉRALITÉS SUR LES ULTRASONS	45
1/ Différents types d'ondes	45
2/ Propriétés des ondes L et S en milieu infini	47
IV - ANALOGIES POSSIBLES - CHOIX DU TYPE D'ONDES	55
1/ Analogie théorique exacte	55
2/ Analogie empirique	57
V - ÉTUDE THÉORIQUE DES ONDES DE LAMB	61
1/ Equations du mouvement. Différents types d'ondes en milieu infini	61
2/ Ondes élastiques dans une plaque, ondes de Lamb, ondes de Rayleigh ..	65
3/ Etude particulière du 1er mode asymétrique, ondes de flexion	80
VI - ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX CONCERNANT LES ONDES DE LAMB	97
VII - DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL - CALCUL DU CHAMP DEVANT L'ÉMETTEUR	117
1/ Généralités	117
2/ Calcul du champ devant l'émetteur	120
3/ Description de l'installation	126
VIII - RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX	135
1/ Etude du dispositif expérimental	135
2/ Production des ondes de Lamb. Etude du champ obtenu	139
3/ Résultats expérimentaux concernant les lois de propagation	142

	Pages
IX - RELATIONS ANALOGIQUES	153
X - CONCLUSION	169
BIBLIOGRAPHIE	171

NOTATIONS

- C : célérité de phase de la houle
 C_g : célérité de groupe de la houle
 c : célérité de phase d'une onde ultrasonore
 c_g : célérité de groupe d'une onde ultrasonore
 c_L : célérité des ondes ultrasonores longitudinales
 c_S : célérité des ondes ultrasonores transversales
 c_R : célérité des ondes ultrasonores de surface (de Rayleigh)
 $c_* = c/c_S$
 $c_{g*} = c_g/c_S$
 C_o, C_{go} : valeurs de C, C_g en profondeur infinie
 c_o, c_{go} : valeurs de c, c_g en épaisseur infinie
 D : épaisseur de la plaque élastique
 d : profondeur (houle)
 f : fréquence d'une onde ultrasonore
 $(fD)_* = fD/c_S$
 g : accélération due à la pesanteur
 H : amplitude d'une onde ultrasonore
 H_o : valeur de H en épaisseur infinie
 h : creux de la houle
 h_o : valeur de h en profondeur infinie
 $k = 2\pi/L$ nombre d'onde de la houle
 L : longueur d'onde de la houle
 L_o : valeur de L en profondeur infinie
 $R_L = \left(1 - \frac{c^2}{c_L^2}\right)^{1/2}$
 $R_S = \left(1 - \frac{c^2}{c_S^2}\right)^{1/2}$
 T : période de la houle
 ρ : masse spécifique

φ, ψ : potentiels de vitesse

Λ : longueur d'onde d'une onde ultrasonore

$\xi = \frac{2\pi}{\Lambda}$ nombre d'onde d'une onde ultrasonore

ω : pulsation = $2\pi f$ ou $2\pi/T$

$\theta_L = \pi f D R_L / c$

$\theta_S = \pi f D R_S / c$

ν : coefficient de Poisson d'un milieu solide.

Chapitre I

INTRODUCTION

L'étude de la propagation et de l'action de la houle dans une zone côtière se fait en général par la réalisation d'une représentation en réduction de la zone intéressée, réduction appelée modèle réduit. Sur ce modèle, on fait agir de la houle de caractéristiques réduites déterminées suivant une loi de similitude dite similitude de Froude. Les caractéristiques de la houle peuvent alors être relevées en tous les points voulus au moyen de capteurs à variation de résistance électrique et d'enregistreurs.

Ces modèles sont en général réalisés à une échelle comprise entre le $1/20^e$ et le $1/200^e$. Ces limites sont imposées par deux impératifs :

- les dimensions du modèle ne doivent pas être prohibitives,
- les caractéristiques de la houle modèle ne doivent pas être trop petites afin que les ondes demeurent purement de gravité (période supérieure à 0,25 s).

En pratique, les dimensions du modèle seront donc toujours importantes et nécessiteront de grands locaux.

On a donc essayé de diminuer l'échelle du modèle en se tournant vers d'autres types d'ondes. En particulier, le Laboratoire National d'Hydraulique de Chatou a réalisé des modèles à une échelle de l'ordre du $1/1000^e$ en utilisant des rides capillaires (fréquence supérieure à 10). Cette méthode a donné des résultats satisfaisants.

Le but de notre étude était donc de poursuivre dans la même voie en tendant à descendre à une échelle de l'ordre du $1/10000^e$ par l'utilisation d'ondes ultrasonores. C'est pourquoi nous avons recherché une analogie entre la houle et les ultrasons et avons essayé de la mettre en pratique expérimentalement.

Parallèlement et pendant la mise au point du dispositif expérimental, nous avons programmé une méthode de calcul permettant de tracer numériquement un plan de vagues. Cette méthode numérique constitue en effet un excellent point de comparaison pour les résultats obtenus par la méthode analogique.

Cet exposé sera articulé de la façon suivante :

Nous allons d'abord rappeler sommairement les notions de base concernant la houle et en particulier les phénomènes de réfraction ; rappels que nous ferons suivre de l'exposé de la méthode de calcul numérique de plans de vagues. Ensuite nous énoncerons quelques généralités sur les ondes ultrasonores en recherchant les analogies possibles et expliquerons les raisons qui nous ont fait retenir un type d'ondes particulier appelé ondes de Lamb. Une étude théorique et bibliographique de ce type d'ondes suivra. Après quoi, nous décrirons le dispositif expérimental et justifierons les caractéristiques de l'émetteur d'ultrasons par un calcul théorique du champ produit. Cette description sera suivie de l'énoncé des résultats expérimentaux. Enfin nous comparerons ces résultats avec ceux du calcul numérique et établirons les relations analogiques.

Chapitre II

GÉNÉRALITÉS SUR LA HOULE CALCUL NUMÉRIQUE DE LA RÉFRACTION

PRINCIPALES NOTATIONS PROPRES AU CHAPITRE II

E : énergie par longueur d'onde et unité de largeur

E_c : énergie cinétique

E_p : énergie potentielle

E_t : énergie transmise

p : pression

V : vitesse d'une particule

u, v, w : composantes de la vitesse d'une particule

x, y, z : coordonnées d'une particule en mouvement

x_o, y_o, z_o : coordonnées d'une particule au repos

t : temps

γ : cambrure = $\frac{h}{L}$

ζ : rotationnel du vecteur vitesse

η : élévation de la surface libre

a : dimension de la maille en mètres

C_{IJ} : célérité au noeud I, J du quadrillage

D_{IJ} : profondeur au noeud I, J du quadrillage

E_L : célérité au point (X_L, Y_L)

F_L : profondeur au point (X_L, Y_L)

V_L : amplitude relative de la houle au point (X_L, Y_L)

X_L, Y_L : abscisse et ordonnée du point courant le long d'une orthogonale

X_o, Y_o : abscisse et ordonnée du point de départ d'une orthogonale

$(CX)_{IJ} = \frac{\partial C_{IJ}}{\partial x}$ au noeud IJ du quadrillage

$(CY)_{IJ} = \frac{\partial C_{IJ}}{\partial y}$ au noeud IJ du quadrillage

$$(C^2X)_{IJ} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}{}_{IJ} \text{ au noeud } IJ \text{ du quadrillage}$$

$$(C^2Y)_{IJ} = \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}{}_{IJ} \text{ au noeud } IJ \text{ du quadrillage}$$

$$(C^2XY)_{IJ} = \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}{}_{IJ} \text{ au noeud } IJ \text{ du quadrillage}$$

1 - MOUVEMENTS ONDULATOIRES DE LA MER

La mer est sujette à divers mouvements ondulatoires parmi lesquels on peut citer : les rides capillaires, les houles ordinaires, les houles de longue période, les marées.

Le facteur commun à toutes ces ondes est la pesanteur qui en est l'agent moteur en jouant le rôle de force de rappel. En effet, des particules de fluide déplacées de leur position d'équilibre par une force extérieure tendent à y revenir sous l'action de leur propre poids en déplaçant à leur tour des particules voisines et ainsi de suite ... d'où la propagation du phénomène. C'est pourquoi on appelle ces mouvements ondes de gravité.

D'autres forces internes viennent s'ajouter ou se soustraire à la pesanteur en particulier la viscosité et la tension superficielle. Dans le cas où ces forces sont négligeables par rapport à la pesanteur, on est en présence d'une onde de gravité pure. C'est en particulier le cas de la houle.

Les forces extérieures génératrices du mouvement varient suivant les types d'ondes. Citons par exemple le vent pour la houle, les forces d'attractions astrales pour les marées, les séismes sous-marins pour les raz-de-marée ou "tsunamis".

Enfin ces différents types de mouvement intéressent une partie plus ou moins importante de la mer. Par exemple les marées agissent sur la totalité de la masse liquide, alors que les rides capillaires et la houle n'intéressent qu'une profondeur limitée ; aussi les appelle-t-on *ondes de surface*.

En résumé on peut distinguer les types suivants :

- *ondes de capillarité* pour lesquelles les forces capillaires sont prédominantes ; période inférieure à $1/10^6$ de seconde,
- *les houles ordinaires* purement de gravité, de période comprise entre 1 et 20 s,
- *les houles de longue période* (plusieurs minutes) jouant un rôle dans la formation des seiches dans les ports,
- *les houles de très longue période*, de l'ordre de 15 à 60 minutes (raz-de-marée),
- *les marées*, de période liée à la durée de la rotation terrestre et à celle des révolutions de la lune et du soleil.

Evidemment il n'y a pas de séparation nette entre ces différents types. Il existe des ondes intermédiaires comme par exemple les rides gravito-capillaires pour lesquelles les forces de gravité et de tension superficielle sont du même ordre de grandeur.

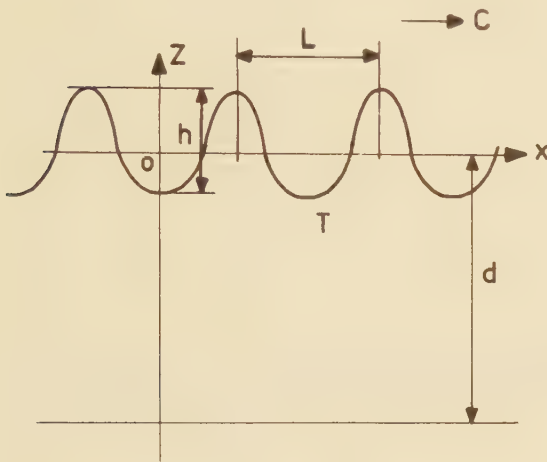
Dans ce qui suit nous allons nous limiter à l'étude de la houle ordinaire.

2 - THÉORIES DE LA HOULE CYLINDRIQUE EN PROFONDEUR INFINIE OU CONSTANTE

a - Généralités

La théorie d'une houle quelconque en profondeur quelconque variable conduit à des problèmes mathématiques insolubles. Aussi se limite-t-on à la forme la plus simple sous laquelle elle puisse se présenter, c'est-à-dire la houle cylindrique à deux dimensions dont les génératrices sont rectilignes et perpendiculaires à la direction générale du mouvement et se propageant en profondeur constante ou infinie. Cela conduit encore à des problèmes mathématiques compliqués et à des solutions multiples entre lesquelles il n'est pas toujours facile de choisir.

Nous rappelons brièvement ci-après les diverses théories existantes.



b - Grandeurs et équations de base

Les paramètres caractéristiques de la houle cylindrique sont :

- la période T, temps qui sépare le passage de deux crêtes successives en un point fixe,
- la longueur d'onde L, distance qui sépare deux crêtes successives,
- la célérité $C = L/T$.

Les variables utilisées pour l'étude de la houle sont soit les variables d'Euler (composantes u, v, w, de la vitesse en un point en fonction de ses coordonnées x, y, z, et du temps t), soit les variables de Lagrange

(coordonnées x, y, z, d'une particule en fonction de ses coordonnées au repos x_0, y_0, z_0 et du temps t).

En coordonnées d'Euler, les équations générales de l'hydraulique appliquées à la houle cylindrique, la force appliquée se réduisant à la pesanteur, s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} + g = 0 \end{cases}$$

L'équation de continuité, qui exprime la conservation des volumes, s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Le rotationnel du vecteur vitesse s'écrit :

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

En coordonnées de Lagrange, nous avons :

comme équations générales

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial z}{\partial x_0} = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_0} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial z_0} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial z}{\partial z_0} = 0 \end{array} \right.$$

comme équation de continuité

$$\text{Jacobien} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_0, z_0)} = 1$$

comme rotationnel

$$\zeta = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(x, u)}{\partial(x_0, z_0)} - \frac{\partial(w, z)}{\partial(x_0, z_0)} \right]$$

Le problème de la houle cylindrique revient à trouver une solution qui satisfasse aux conditions suivantes :

- le mouvement est périodique par rapport à la variable $\left(t - \frac{x_0}{C} \right)$,
- le mouvement est nul en profondeur infinie ou, s'il s'agit d'une houle en profondeur limitée, il s'effectue parallèlement au fond,
- la pression est nulle sur la surface libre.

L'intégration des équations montre que ces trois conditions ne sont pas suffisantes pour déterminer le mouvement. On doit ajouter une hypothèse supplémentaire sur la répartition des tourbillons à l'intérieur de la masse fluide, d'où deux catégories de houles théoriques :

- les houles irrotationnelles, pour lesquelles on impose un rotationnel (tourbillon) nul,
- les houles rotationnelles, pour lesquelles le rotationnel est non nul ; on impose alors une condition supplémentaire en se fixant par exemple une loi de répartition des tourbillons avec la profondeur.

D'autre part, il n'est en général pas possible de trouver une solution exacte. On recherche donc une solution approchée en développant les coordonnées x, z de chaque particule et la pression p en un point, fonctions de x_0, z_0 et du temps t , en séries de puissances successives du creux h sous la forme :

$$x = x_0 + h x_1 + h^2 x_2 + \dots$$

$$z = z_0 + h z_1 + h^2 z_2 + \dots$$

$$p = p_0 + h p_1 + h^2 p_2 + \dots$$

$x_1, x_2 \dots z_1, z_2 \dots p_1, p_2 \dots$ étant des fonctions de x_0, z_0 et t .

En s'arrêtant à l'ordre n , on obtiendra une houle dite au $n^{\text{ième}}$ ordre d'approximation.

Nous nous limiterons dans cet énoncé au $2^{\text{ème}}$ ordre.

c - Houles rotationnelles

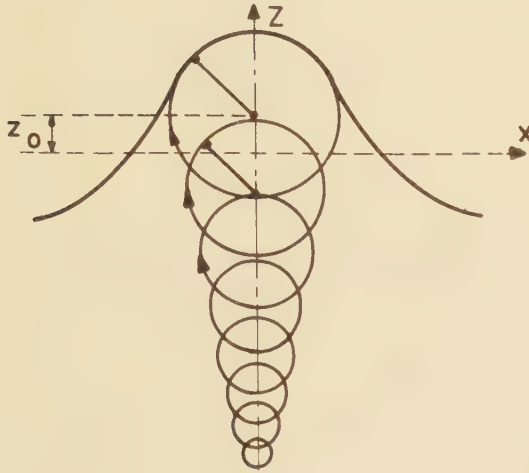
α) Houle de Gerstner

C'est le plus simple des mouvements et c'est la seule solution exacte de la houle

en termes finis que l'on connaisse. Elle est relative au cas de la profondeur infinie.

Les trajectoires des particules sont des cercles dont le rayon décroît exponentiellement avec la profondeur.

Les coordonnées x, z de chaque particule sont :



$$\begin{cases} x = x_0 - R_0 e^{bz_0} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{L} \right) \\ z = z_0 - R_0 e^{bz_0} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{L} \right) \end{cases}$$

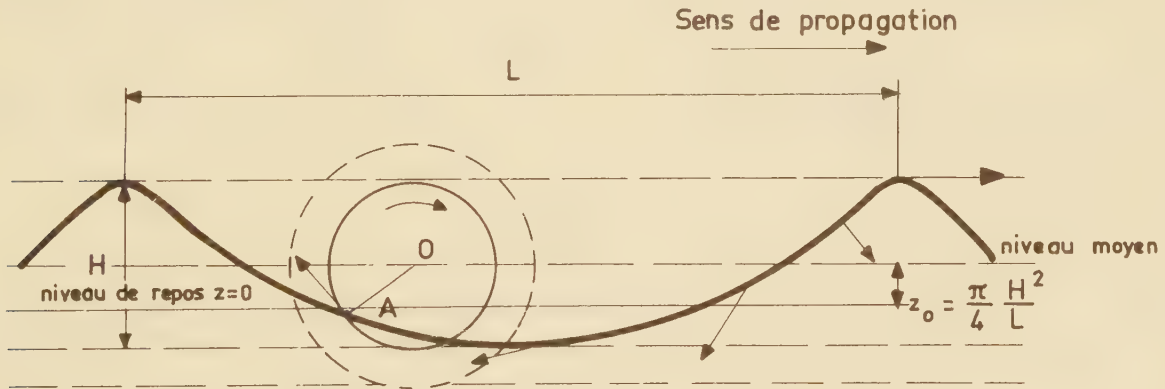
La longueur d'onde est égale à :

$$L = \frac{gT^2}{2\pi}$$

La cote de la surface libre est :

$$\eta = \frac{\pi h^2}{4L} - \frac{h}{2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{L} \right)$$

La surface libre est donc constituée par une *trochoïde* ou cycloïde réduite dont le niveau moyen est surélevé de $\pi h^2/4L$ par rapport au niveau de repos.

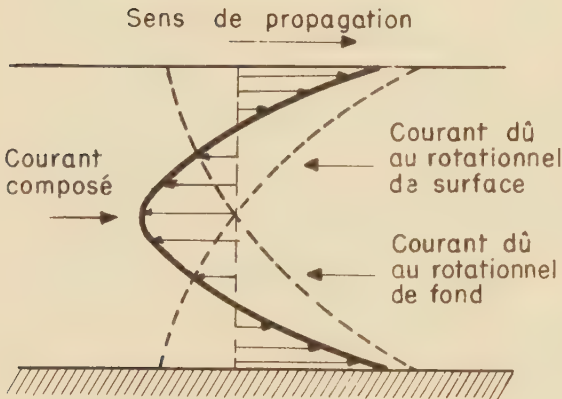
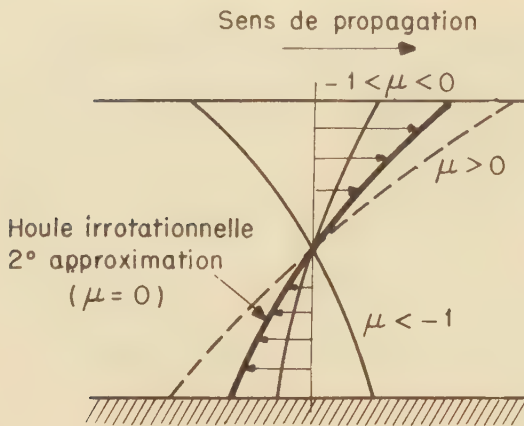


L'énergie par longueur d'onde et par unité de largeur est égale à :

$$E = \frac{1}{8} \rho g h^2 L \left(1 - \frac{\pi^2 h^2}{2L^2} \right)$$

β) Houle rotationnelle de deuxième approximation

Suivant l'hypothèse sur la répartition des tourbillons, on trouve plusieurs résultats.



β1) Supposons que les efforts tangentiels du vent créent un rotationnel qui décroît au fur et à mesure que l'on s'approche du fond où il s'annule, soit :

$$\zeta = \mu \frac{\pi^3 H^2}{TL^2} \frac{\text{sh } 4\pi \frac{z_0 + d}{L}}{\text{sh}^2 \frac{2\pi d}{L}}$$

μ étant une constante arbitraire.

En écrivant la condition de débit moyen nul, on trouve un courant d'entraînement analogue à celui de la houle irrotationnelle de 2ème approximation mais plus fort si $\mu > 0$, plus faible si $-1 < \mu < 0$, nul si $\mu = -1$ et de sens contraire si $\mu < -1$.

β2) Si l'on suppose que le frottement sur le fond introduit un rotationnel qui décroît jusqu'à zéro à la surface et en l'ajoutant au précédent, on trouve un courant d'entraînement dans le sens de propagation en surface et au fond et dans le sens contraire entre les deux.

d - Houles irrotationnelles

En développant en série entière comme ci-dessus on trouve des solutions à différents ordres d'approximation.

Le mouvement étant irrotationnel nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Il existe donc un potentiel des vitesses tel que :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

L'équation de continuité montre que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = 0$$

La fonction φ est harmonique.

α) Houle irrotationnelle au premier ordre d'approximation ou houle trochoïdale elliptique

α1) Le potentiel

La fonction harmonique φ au premier ordre en h , telle que w s'annule sur le fond pour $z = -d$, est :

$$\varphi(x, z, t) = - \frac{ghT}{4\pi} \frac{\operatorname{ch} 2\pi \frac{z+d}{L}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi d}{L}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right)$$

α2) La condition de surface

La pression p s'exprime par l'équation de Bernoulli généralisée :

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{Cte}$$

En supposant que les vitesses des particules sont assez petites, on peut négliger le carré des dérivées de φ par rapport à x et z . En écrivant que la pression est constante à la *surface libre*, on obtient une équation simplifiée dite condition de Poisson :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz = \text{Cte} \implies \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

En confondant la vitesse verticale $\partial z / \partial t$ en un point fixe avec la composante verticale $\partial \varphi / \partial z$ de la vitesse d'une particule en ce point, on trouve :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Compte tenu de l'expression de φ , cette condition s'écrit :

$$\operatorname{th} 2\pi \frac{z+d}{L} = 2\pi \frac{L}{gT^2}$$

c'est-à-dire, comme z est petit devant d

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi d}{L}$$

c'est l'expression fondamentale qui relie la longueur d'onde L , la période T de la houle et la profondeur d .

α3) Trajectoire des particules - forme de la surface libre

Les composantes u et w de la vitesse sont :

$$\left| \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\pi h}{T} \frac{\operatorname{ch} 2\pi \frac{z+d}{L}}{\operatorname{sh} 2\pi \frac{d}{L}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\pi h}{T} \frac{\operatorname{sh} 2\pi \frac{z+d}{L}}{\operatorname{sh} \frac{2\pi d}{L}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) \end{aligned} \right.$$

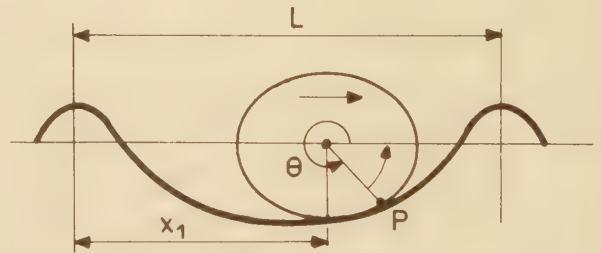
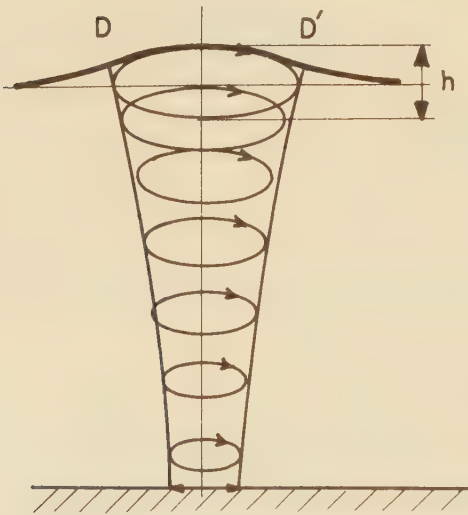
et les coordonnées des particules s'en déduisent par intégration en tenant compte de la relation entre T et L :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \frac{h}{2} \frac{\operatorname{ch} 2\pi \frac{z_0 + d}{L}}{\operatorname{sh} \frac{2\pi d}{L}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{L} \right) \\ z = z_0 + \frac{h}{2} \frac{\operatorname{sh} 2\pi \frac{z_0 + d}{L}}{\operatorname{sh} \frac{2\pi d}{L}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{L} \right) \end{array} \right.$$

Ce sont les équations paramétriques d'ellipses centrées au point x_0, z_0 et dont les axes ont pour longueur :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = h \frac{\operatorname{ch} 2\pi \frac{z_0 + d}{L}}{\operatorname{sh} \frac{2\pi d}{L}} \\ b = h \frac{\operatorname{sh} 2\pi \frac{z_0 + d}{L}}{\operatorname{sh} \frac{2\pi d}{L}} \end{array} \right.$$

Les trajectoires des particules sont donc des orbites fermées. Au fond le petit axe est nul, le mouvement de la particule est oscillatoire rectiligne d'amplitude $h/\operatorname{sh} \frac{2\pi d}{L}$.



A la surface libre, le petit axe de l'ellipse vaut h et le grand axe $h \coth \frac{2\pi d}{L}$.

A un instant donné, les particules dont la position moyenne est identique se trouvent sur une courbe dite *trochoïde elliptique*.

En particulier, la surface libre est constituée par une telle courbe. Cette courbe est obtenue de la manière suivante :

Une ellipse se déplace de telle manière que son centre parcourt l'horizontale du niveau de repos, vers la droite. Un point P de cette ellipse tourne autour du centre de l'ellipse d'un angle θ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et tel que

$$\theta = \frac{2\pi x_1}{L}$$

x_1 étant le déplacement horizontal du centre.

Cette construction de la trochoïde elliptique se déduit des équations paramétriques des trajectoires des particules en posant $t = 0$.

$\alpha 4)$ Energie

L'énergie de la houle s'évalue par longueur d'onde et unité de largeur. Elle est la somme de l'énergie potentielle par rapport au niveau de repos et de l'énergie cinétique.

L'énergie potentielle est égale à :

$$E_p = \int_0^L \rho g \frac{z^2}{2} dx = \frac{1}{16} \rho g h^2 L$$

L'énergie cinétique vaut :

$$E_c = \iint \frac{1}{2} \rho V^2 dx dz = \frac{1}{2} \rho \iint V^2 \frac{\partial(x, z)}{\partial(x_0, z_0)} dx_0 dz_0$$

$$E_c = \frac{1}{16} \rho g h^2 L$$

L'énergie potentielle et l'énergie cinétique sont donc égales. L'énergie totale est :

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{8} \rho g H^2 L$$

$\alpha 5)$ Cas particuliers

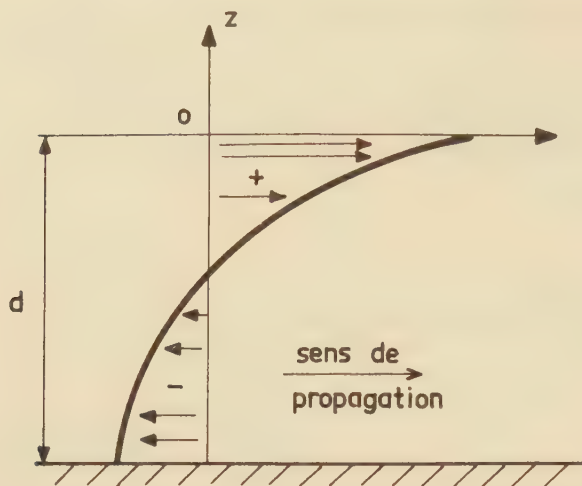
En *profondeur infinie*, $th 2\pi d/L$ est égal à 1 et les formules se simplifient ; on a :

$$\left| \begin{array}{l} L = \frac{gT^2}{2\pi} \\ u = \frac{\pi h}{T} e^{\frac{2\pi z}{L}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) \\ w = \frac{\pi h}{T} e^{\frac{2\pi z}{L}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) \end{array} \right.$$

Les orbites des particules sont circulaires et leur rayon décroît exponentiellement avec la profondeur.

En *faible profondeur*, on peut confondre $th 2\pi d/L$ avec son argument et on a :

$$L^2 = gT^2 d \implies C = \sqrt{gd}$$

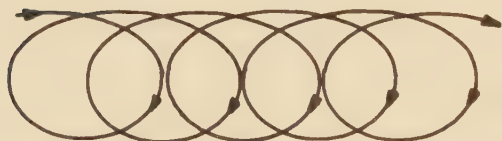


β) Houle irrotationnelle au deuxième ordre d'approximation

La houle irrotationnelle du second ordre est accompagnée d'un courant horizontal d'entraînement. En imposant comme condition que le débit moyen dans une section verticale soit nul, on trouve que le courant d'entraînement est dirigé dans le sens de la propagation dans les parties superficielles et en sens inverse dans les parties profondes. L'intensité de ce courant varie dans le même sens que la cambrure. Elle peut atteindre le dixième de la célérité pour des houles de tempête. Du fait des courants d'entraînement les trajectoires de type elliptique ne sont plus fermées. Elles se déplacent à la vitesse du courant d'entraînement.

e - En conclusion

Dans toute la suite de l'étude, nous utiliserons comme base les résultats de la théorie de la houle irrotationnelle de premier ordre.



3 - DÉFORMATION DE LA HOULE AU COURS DE SA PROPAGATION - DÉFERLEMENT, RÉFLEXION, DIFFRACTION.

Au cours de sa propagation, la houle subit différentes transformations dues à des phénomènes de déferlement, de réflexion, de diffraction et de réfraction.

Nous allons ci-après rappeler très brièvement en quoi consistent les trois premiers. Nous nous étendrons plus longuement sur la réfraction qui nous intéresse plus particulièrement dans le cadre de cette étude.

a - Déferlement

Un paramètre important dont nous n'avons pas parlé est la cambrure de la houle, égale au rapport du creux à la longueur d'onde : $\gamma = h/L$.

Ce paramètre caractérise la courbure des crêtes. Lorsque l'amplitude de la houle croît, la cambrure augmente : la crête devient de plus en plus pointue. Cette cambrure ne peut pas croître indéfiniment. Lorsqu'elle atteint une certaine valeur appelée cambrure limite, la vague "s'écroule" en bouillonnant : on dit qu'elle *déferle*. La cambrure limite théorique correspondant à la houle trochoïdale elliptique est :

$$\gamma_c = \frac{1}{\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi d}{L} = 0,318 \operatorname{th} \frac{2\pi d}{L}$$

Cette valeur est correcte pour $d/L > 0,4$. Dans le cas contraire, la valeur réelle de γ_c est différente et est donnée par diverses relations empiriques dont :

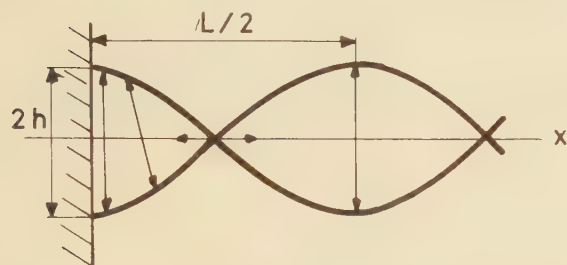
$$\gamma_c = 0,14 \operatorname{th} \frac{2\pi d}{L} \quad 0,1 < \frac{d}{L} < 0,4$$

b - Réflexion

Lorsque la houle arrive en présence d'un obstacle plan solide, celui-ci impose comme condition aux limites que la composante de la vitesse des particules normale à sa surface soit nulle. Ce qui, en potentiel, s'exprime par :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

Cette condition est satisfaite en superposant à l'onde incidente une deuxième onde dite onde *réfléchie*. Il y a réflexion de la houle sur l'obstacle.



α) Dans le cas où l'obstacle est une paroi verticale et perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde incidente, l'onde réfléchie est de même direction, de sens opposé et de même creux. Il y a formation d'une onde cylindrique stationnaire appelée *clapotis*. Cette onde stationnaire, dans le cas de la théorie au premier ordre, est d'amplitude double et présente une série de ventres et de noeuds espacés d'une demi-longueur d'onde. Les tra-

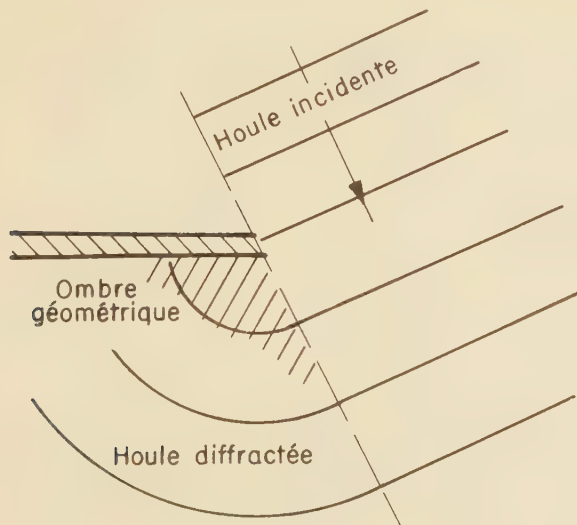
jectoires des particules sont des droites verticales aux ventres (en particulier le long de la paroi) horizontales aux noeuds et inclinées ailleurs.

β) Dans le cas d'une paroi verticale non perpendiculaire à la direction de propagation et dont la normale fait un angle α avec celle-ci, la houle réfléchie est toujours de même amplitude, mais sa direction fait un angle 2α avec la houle incidente. Le mouvement résultant compliqué est appelé *clapotis gaufre*.

γ) Dans le cas d'une paroi non verticale, il y a également réflexion, mais l'amplitude h' de l'onde réfléchie est inférieure à celle h de l'onde incidente. Le rapport h'/h ou *coefficient de réflexion* varie en fonction de la cambrure au large et de l'angle d'inclinaison de la paroi. Il diminue très vite quand cet angle diminue. Il dépend également de la nature de la paroi et est d'autant plus petit que la paroi est plus rugueuse.

c - Diffraction

Lorsque la houle arrive en présence d'un obstacle de dimensions finies, on constate que derrière l'obstacle, dans "l'ombre géométrique", subsiste une agitation. La houle est soumise à un phénomène de diffraction analogue à celui de la lumière.



α) Dans le cas de la houle irrotationnelle, le problème mathématique correspondant se pose simplement de la façon suivante :

On cherche un potentiel de vitesses $\varphi(x, y, z, t)$ de période T et satisfaisant aux conditions :

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ le long des parois}$$

Posons (avec $k = 2\pi/L$) :

$$\varphi(x, y, z, t) = -g \frac{hT}{2\pi} \frac{ch k(z+d)}{ch kd} F(x, y) e^{2i\pi \frac{t}{T}}$$

potentiel dont la partie réelle correspond à la houle trochoïdale elliptique.

La fonction $F(x, y)$ caractérise la distribution en plan des creux ; elle est solution de :

$$\Delta F + k^2 F = 0$$

avec le long des parois des obstacles $\partial F / \partial n = 0$.

β) Dans le cas où la profondeur est constante et pour des dispositions simples d'ouvrages, différentes solutions de cette équation, exactes ou approchées, ont été données ainsi que des formules empiriques. Nous ne les passerons pas en revue.

4 - RÉFRACTION DE LA HOULE - TRACÉ DE PLANS DE VAGUES PAR LE CALCUL NUMÉRIQUE

a - Généralités

La longueur d'onde et la célérité de la houle sont données par :

$$\left| \begin{array}{l} L = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi d}{L} \\ C = \frac{gT}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi d}{L} \end{array} \right. \quad \text{en profondeur quelconque}$$

$$\left| \begin{array}{l} L = \frac{gT^2}{2\pi} \\ C = \frac{gT}{2\pi} \end{array} \right. \quad \text{en profondeur infinie}$$

Elles dépendent de la période T . L'eau est donc pour la houle un milieu dispersif où la célérité dépend de la longueur d'onde. Les houles les plus courtes se déplacent plus lentement que les longues. Cela fait donc apparaître la notion de vitesse de groupe, vitesse avec laquelle se propage l'énergie, vitesse différente de la célérité de phase dans un milieu dispersif.

b - Energie transmise - Vitesse de groupe

On démontre que la vitesse de groupe d'une onde est égale à la dérivée de la fréquence angulaire ω par rapport au nombre d'onde $k = 2\pi/L$.

Nous avons donc :

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = - \frac{2\pi}{k^2} \frac{dT}{dk}$$

La formule donnant la célérité s'écrit :

$$\frac{kgT^2}{4\pi^2} \operatorname{th} kd = 1$$

En la dérivant par rapport à k , on trouve :

$$\frac{dT}{dk} = -\frac{T}{2k} - \frac{Td}{2 \operatorname{sh} kd \operatorname{ch} kd}$$

d'où

$$C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{4\pi d/L}{\operatorname{sh} 4\pi d/L} \right)$$

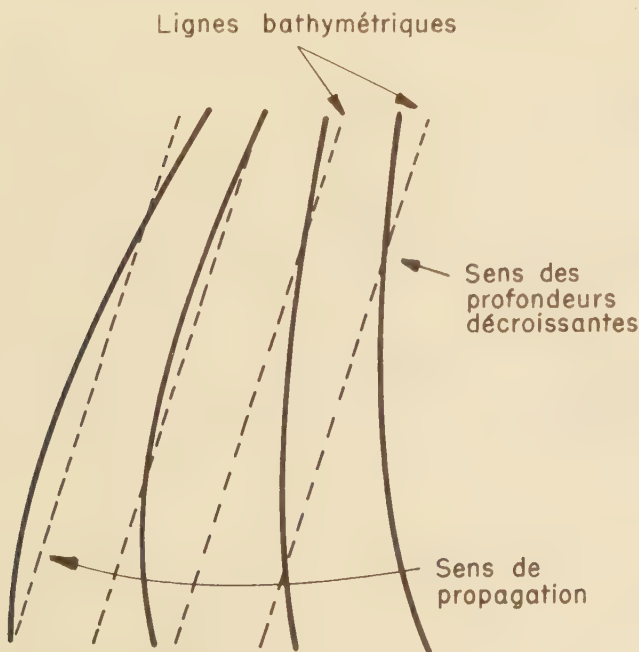
La célérité de groupe est donc inférieure à la célérité de phase et égale à sa moitié en profondeur infinie. L'énergie transmise par unité de temps ou débit moyen d'énergie est égale à l'énergie par unité de largeur et de longueur multipliée par la célérité de groupe, soit :

$$E_t = \frac{1}{8} \rho g h^2 C_g$$

c - Divers aspects de la réfraction

Outre la période, la célérité de phase de la houle dépend également de la profondeur. Elle diminue quand la profondeur décroît (figure 1). La célérité de groupe varie également en fonction de la profondeur. Elle croît légèrement puis décroît quand la profondeur décroît. Ces variations de célérité entraînent donc les phénomènes suivants qualifiés de phénomènes de *réfraction* :

- Si la houle se propage normalement aux lignes bathymétriques, sa longueur d'onde diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche du rivage dans l'hypothèse où la période reste constante. Les lignes de crêtes sont d'autant plus serrées que l'on se rapproche du rivage. Dans l'hypothèse où il n'y a pas de transport d'énergie perpendiculaire à la direction de propagation, l'énergie transmise doit rester constante. La célérité de groupe variant, le creux varie donc en sens inverse, c'est-à-dire que lorsque la profondeur décroît, l'amplitude décroît légèrement puis croît jusqu'au déferlement (figure 1).



- Si la direction de la houle est quelconque par rapport aux lignes d'égales profondeurs, les célérités sont différentes en deux points voisins d'une même crête. Par suite, les crêtes vont se déformer et tourner et les orthogonales aux crêtes, enveloppes des directions de propagation, vont se rapprocher et s'écarter. Si l'on fait toujours l'hypothèse qu'il n'y a pas de transmission d'énergie perpendiculaire à la direction de propagation, l'énergie transmise entre deux orthogonales reste constante. Donc les convergences et divergences d'orthogonales se traduisent respectivement par une augmentation et une diminution d'amplitude.

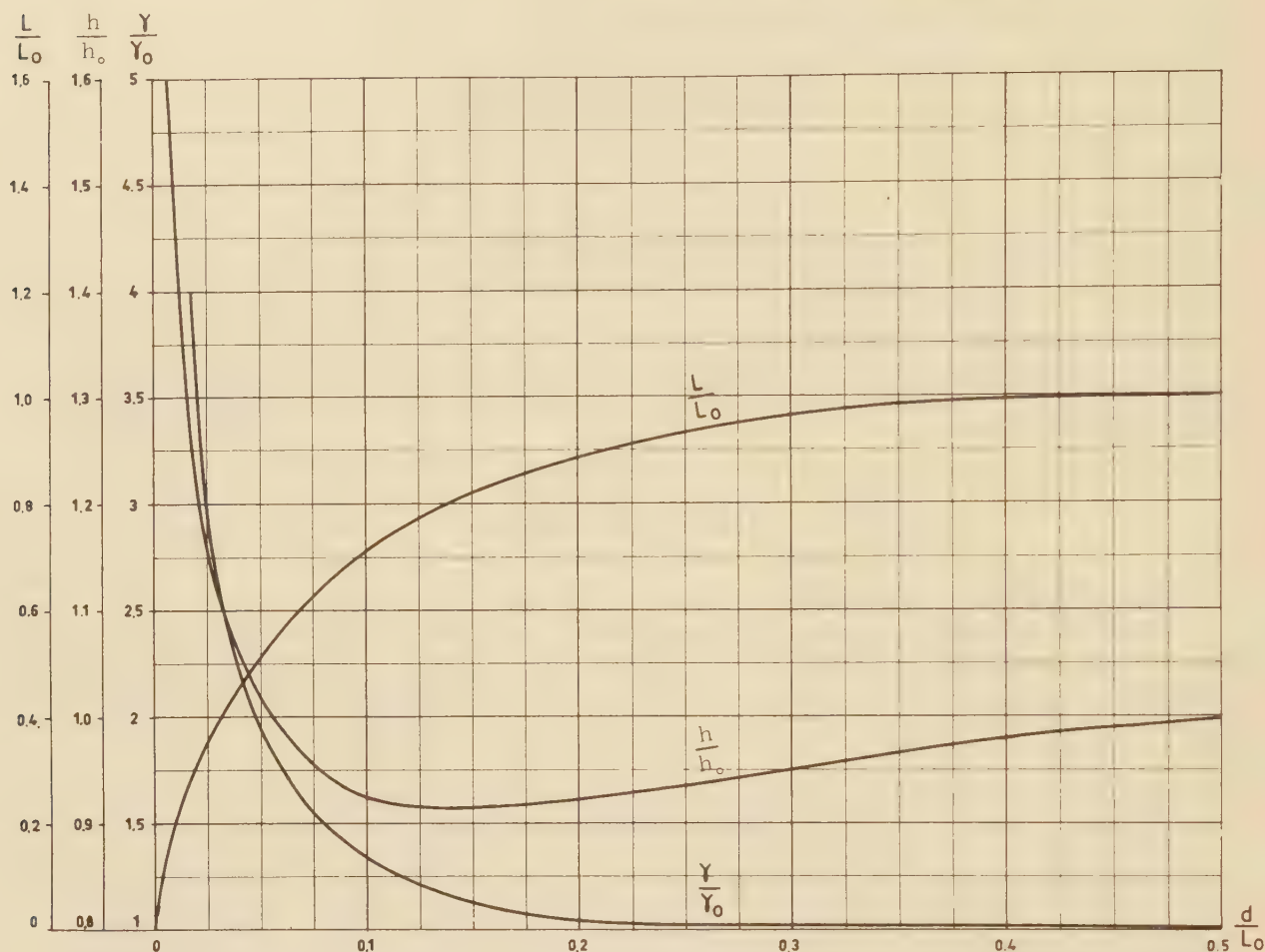
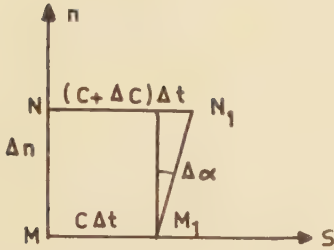
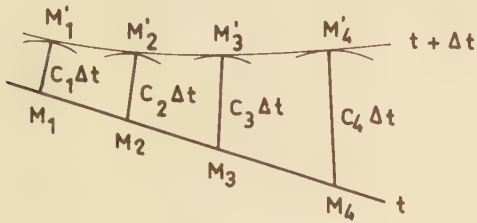


Figure 1 - Variation de L/L_0 , h/h_0 , γ/γ_0 , en fonction de d/L_0 , sur un fond incliné.

En résumé, une houle de direction quelconque en provenance du large subit à l'approche du rivage un phénomène de réfraction à double aspect :

- l'un est géométrique et plus particulièrement lié à la variation de célérité de phase ; il est analogue à celui de la réfraction de la lumière en milieu d'indice variable, et se traduit, pour les houles de direction non parallèle au gradient de célérité, c'est-à-dire non perpendiculaire aux lignes de niveau du fond, par une déformation et une rotation des crêtes et des orthogonales accompagnées d'une variation de l'écartement de ces dernières ;
- l'autre aspect est d'ordre énergétique et se traduit par une variation de l'amplitude le long d'une orthogonale ; en effet, la conservation de l'énergie se propageant impose que les variations de profondeur, de célérité de groupe et d'écartement des orthogonales soient compensées par une variation correspondante d'amplitude de l'onde.

Ces deux aspects sont en fait étroitement liés ; nous ne les distinguerons que pour les étudier théoriquement.



α) Aspect géométrique de la réfraction

Considérons une crête de houle dans sa position à l'instant t ; la profondeur d'eau varie d'un point à un autre de cette crête ; la célérité de phase également. Si l'on applique la construction d'Huyghens pour obtenir la position à l'instant $t + \Delta t$, on trace des cercles de rayons différents les uns des autres : la crête se déforme et tourne.

Soient M et N deux points voisins de la crête à l'instant t distants de Δn , n étant l'abscisse curviligne le long de la crête. Les rayons des cercles correspondants sont donc $C\Delta t$ et $(C + \Delta C)\Delta t$. L'angle $\Delta\alpha$ dont auront tourné l'élément de crête et l'orthogonale correspondante est donc :

$$\Delta\alpha = - \frac{\Delta C \Delta t}{\Delta n}$$

soit à la limite, lorsque $\Delta n \rightarrow 0$

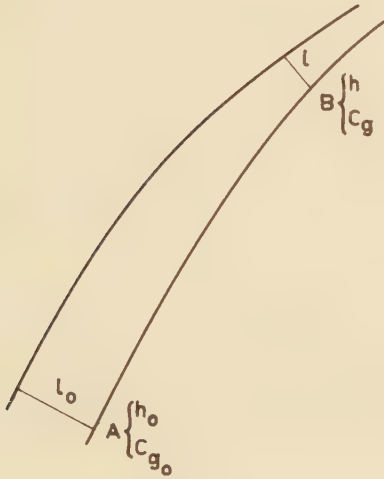
$$\frac{d\alpha}{dt} = - \frac{dC}{dn} \quad (1)$$

Cette équation est l'équation différentielle des orthogonales. En introduisant comme variable l'abscisse curviligne s le long d'une orthogonale, elle s'écrit aussi ($ds = C dt$) :

$$\frac{d\alpha}{ds} = - \frac{1}{C} \frac{dC}{dn} \quad (2)$$

Sous cette forme, elle est l'expression mathématique du principe suivant : la courbure de l'orthogonale est en chaque point égale au gradient logarithmique de célérité le long de la crête ; l'orthogonale s'infléchit en direction des zones de plus faible célérité.

β) Aspect énergétique de la réfraction



La variation d'amplitude le long d'une orthogonale est définie par le coefficient de réfraction K , égal au rapport de l'amplitude h en un point quelconque de l'orthogonale à la profondeur d , à l'amplitude h_0 au large sur la même orthogonale.

La variation de ce coefficient est déterminée en écrivant que le débit d'énergie entre deux orthogonales voisines est constant le long de ces orthogonales, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun transfert d'énergie à travers les orthogonales et aucune perte d'énergie au cours de la propagation. Considérons deux orthogonales voisines espacées de l_0 au point A situé au large et de l au point B situé à la profondeur d ; en A et B , la célérité de groupe est respectivement C_{g0} et C_g ; l'amplitude totale ou creux de la houle h_0 et h . Le débit d'énergie en A est :

$$Q_0 = \frac{1}{8} \rho g h_0^2 l_0 C_{g0}$$

Au point B, il devient :

$$Q = \frac{1}{8} \rho g h^2 l C_g$$

En égalant ces deux quantités, on trouve :

$$K = \frac{h}{h_0} = \left(\frac{l_0}{l} \frac{C_{g0}}{C_g} \right)^{1/2} \quad (3)$$

soit $K = K_1 K_2$ avec :

$$K_1 = \left(\frac{l_0}{l} \right)^{1/2} \quad K_2 = \left(\frac{C_{g0}}{C_g} \right)^{1/2} \quad (4)$$

Le coefficient de réfraction se décompose donc en deux coefficients partiels K_1 et K_2 distincts, d'origines différentes.

Le premier, K_1 , est lié à la variation d'écartement des orthogonales ; il est égal au rapport de l'amplitude h_2 en un point quelconque de l'orthogonale, à l'amplitude h_1 qui existerait au même point en incidence normale sans déformation ni rotation des orthogonales.

Le deuxième, K_2 , est lié à la variation de la célérité de groupe en fonction de la profondeur ; il est égal au rapport de l'amplitude h en un point de profondeur quelconque en l'absence de déformation des orthogonales à l'amplitude h_0 au large.

Nous allons étudier séparément ces deux coefficients.

β1) Coefficient K_1

W.H. Munk et R.S. Arthur [1] ont développé une théorie donnant le coefficient K_1 en chaque point d'une orthogonale ; les seules données nécessaires étant le tracé de l'orthogonale et les valeurs de la célérité et de ses dérivées le long et au voisinage de celle-ci.

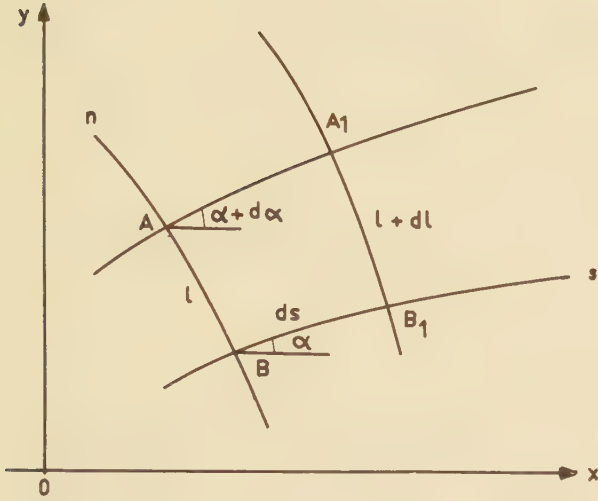
Nous reprenons ici succinctement leur calcul.

Le coefficient K_1 est calculé en chaque point par l'intermédiaire d'un autre coefficient β directement lié à l'écartement des orthogonales et appelé "coefficient d'écartement". Ce dernier est défini comme étant le rapport de l'écartement l de deux orthogonales voisines en profondeur quelconque à l'écartement l_0 des mêmes orthogonales en profondeur infinie.

$$\beta = \frac{l}{l_0}$$

Ces deux coefficients sont liés d'après (4) par la relation :

$$K_1 = \left(\frac{1}{|\beta|} \right)^{1/2} \quad (5)$$



Considérons deux tronçons AA_1 et BB_1 de deux orthogonales voisines. Les angles que font en B et en A ces deux orthogonales avec Ox sont α et $\alpha + d\alpha$. L'écartement des deux orthogonales est l en AB et $l + dl$ en A_1B_1 . On a :

$$d\alpha = l \frac{d\alpha}{dn} \text{ et } dl = d\alpha ds, \text{ soit } \frac{1}{l} \frac{dl}{ds} = \frac{d\alpha}{dn}$$

En introduisant $\beta = 1/l_0$, on trouve :

$$\frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{dn} \quad (6)$$

Cette équation exprime que la variation logarithmique du coefficient d'écartement est égale à la courbure de la crête de houle. En prenant le temps comme variable, elle s'écrit :

$$\frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dt} = C \frac{d\alpha}{dn} \quad (7)$$

En éliminant α entre cette relation et l'équation différentielle de l'orthogonale et en évaluant les dérivées de C par rapport à n en fonction des dérivées de C par rapport à x et y, on aboutit finalement à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + p \frac{d\beta}{dt} + q\beta = 0 \quad (8)$$

avec :

$$\begin{cases} p(t) = - \left(\frac{\partial C}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial C}{\partial y} \sin \alpha \right) \\ q(t) = C \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \sin^2 \alpha - 2C \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + C \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \cos^2 \alpha \end{cases}$$

ou encore, en prenant s comme variable :

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{p}{C} \frac{d\beta}{ds} + \frac{q}{C^2} \beta = 0 \quad (9)$$

β2) Coefficient K_2

La célérité de groupe C_g de la houle en profondeur quelconque est égale à :

$$C_g = \frac{1}{2} C \left[1 + \frac{4\pi d/L}{\text{sh}(4\pi d/L)} \right]$$

avec $C = C_0 \text{th}(2\pi d/L)$ et en profondeur infinie

$$C_{g0} = \frac{1}{2} C_0$$

On a donc :

$$K_2 = \left(\frac{C_{g0}}{C_g} \right)^{1/2} = \left[\operatorname{th}(2\pi d/L) \left(1 + \frac{4\pi d/L}{\operatorname{sh}(4\pi d/L)} \right) \right]^{-1/2}$$

soit :

$$K_2 = \frac{\operatorname{ch}(2\pi d/L)}{[\operatorname{sh}(2\pi d/L) \operatorname{ch}(2\pi d/L) + 2\pi d/L]}^{1/2} \quad (10)$$

β3) Les courbes de variation de la longueur d'onde L , de l'amplitude $k_2 = h/h_0$ et de la cambrure γ en fonction de d/L_0 sont tracées sur la figure 1.

d - Tracé de plans de vagues par le calcul numérique

α) Généralités

Les phénomènes de réfraction décrits dans le paragraphe précédent ont une grande importance pratique. En effet, les convergences et divergences des orthogonales peuvent entraîner des différences considérables d'amplitude et de direction de la houle en différents points de la côte pour une même houle au large. Il est donc intéressant de tracer un plan donnant les positions successives des crêtes de houle pour voir leur déformation dans une zone côtière. Ce plan s'appelle un plan de vagues. Jusqu'à présent, ces plans étaient réalisés graphiquement par construction des crêtes successives par la méthode d'Huyghens ; cette méthode était longue et fastidieuse et ne donnait pas la valeur de l'amplitude en un point.

Or les théories résumées dans le paragraphe précédent permettent de tracer les orthogonales de la houle et de calculer en chaque point son amplitude relative par rapport à celle au large. Les conditions aux limites compliquées introduites par le fond ne permettent pas une résolution algébrique des équations, mais l'utilisation courante des calculateurs électroniques permet maintenant de réaliser leur résolution numérique approchée. Il suffit pour cela d'établir un programme basé sur des méthodes de calcul numérique valables.

C'est ce que nous avons fait en nous inspirant de l'article de M. Griswold [2] paru dans le *J. of Geoph. Research*. Nous expliquons ci-après la méthode utilisée.

La méthode décrite n'est valable que pour une houle monochromatique ; toutefois sa facilité et sa rapidité d'emploi peuvent permettre l'étude de l'action d'une houle complexe par le tracé successif de plusieurs figures de réfraction correspondant aux diverses périodes présentes dans le spectre.

Dans le précédent paragraphe, nous avons présenté les équations sous deux formes différentes en prenant comme variable le long d'une orthogonale, d'une part le temps, d'autre part l'abscisse curviligne. Pour les intégrer numériquement, nous porterons notre choix sur la variable temps en utilisant un pas d'intégration constant Δt . En effet, la connaissance de points des diverses orthogonales régulièrement espacés dans le temps permet de tracer simultanément les crêtes de houle. En outre, le pas correspondant en abscisse curviligne Δs est variable et diminue avec la profondeur, donnant ainsi une plus grande précision de tracé dans les zones où la réfraction est plus importante.

β) Introduction des données

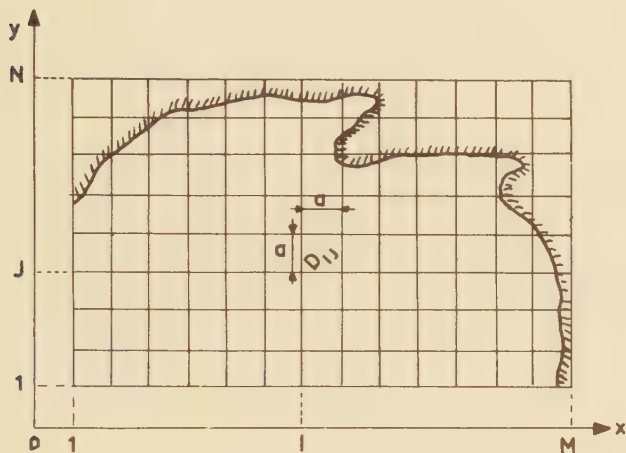
D'après l'étude théorique, les données nécessaires au calcul des orthogonales et de l'amplitude le long de celles-ci sont les suivantes :

- la topographie des lieux (fonds),
- la période et la direction de la houle incidente,
- la célérité de la houle en chaque point et ses dérivées.

Nous allons décrire successivement les procédés employés pour entrer en machine ces diverses données sous forme numérique.

β1) Les fonds

La zone faisant l'objet du calcul est délimitée par un rectangle que l'on couvre d'un quadrillage de mailles de dimension a (figure ci-dessous).



Cette maille sera utilisée comme unité de longueur dans toute la suite du calcul, y compris pour les profondeurs, la célérité et ses dérivées. Toutefois, pour simplifier le travail, les profondeurs seront relevées en mètres et transformées en mailles par le programme de calcul. On définit ensuite deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy distants d'une maille des côtés du rectangle, en plaçant Ox du côté du large. Chaque noeud du quadrillage est alors repéré par deux indices entiers I et J respectivement égaux à l'abscisse et à l'ordonnée du point correspondant exprimées en mailles. I varie de 1 à M et J de 1 à N .

La carte des fonds est alors constituée par la liste des valeurs de la profondeur aux noeuds de ce quadrillage, valeurs relevées par interpolation entre deux lignes de niveau ou plusieurs points de sondage.

Le choix de la maille doit être judicieux ; il sera dicté par l'expérience et la pratique. Il importe en effet que la maille soit assez petite pour obtenir une représentation assez fine des fonds. Toutefois, elle ne doit pas l'être trop, car on se trouverait alors en présence d'une énorme quantité de chiffres à relever et à transcrire, travail fastidieux et d'autant plus inutile que l'on ne dispose que d'un nombre limité de cotes sur une carte marine. Enfin, on est limité dans le même sens par la capacité de mémoire du calculateur électronique, qui ne peut emmagasiner qu'un nombre fini de valeurs.

β2) Caractéristiques de la houle

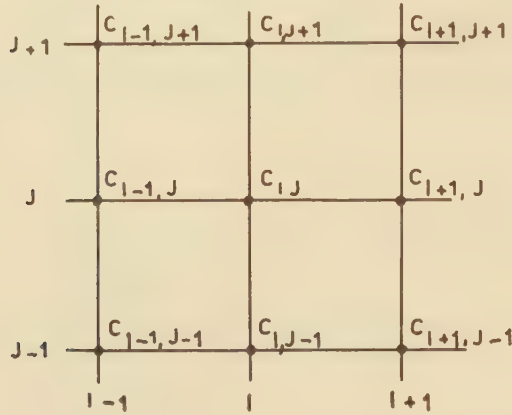
Ce sont la période et la direction ; la période est donnée par sa valeur numérique en secondes ; la direction est définie par l'angle α_2 que font au large les orthogonales avec l'axe Ox , angle exprimé en degrés.

β3) Célérité de la houle

La profondeur D_{IJ} , la période T et la célérité de phase C_{IJ} de la houle sont liées par la relation implicite d'Airy :

$$C_{IJ} = \frac{gT}{2\pi} \operatorname{th} \left(\frac{2\pi D_{IJ}}{C_{IJ}T} \right) \quad (11)$$

Connaissant D_{IJ} nous trouverons C_{IJ} en la résolvant par approximations successives de la façon suivante :



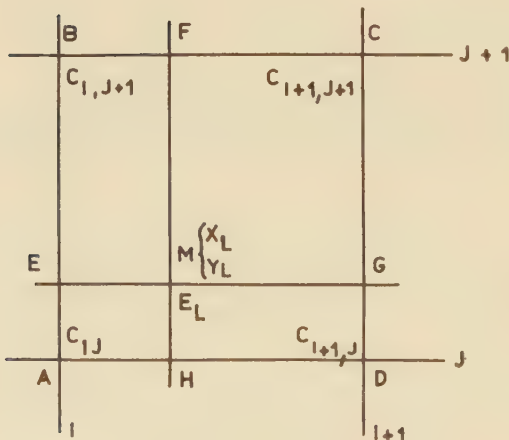
On donne à C_{IJ} une valeur arbitraire de l'ordre de grandeur de la vraie valeur (égale, par exemple, à la célérité en profondeur infinie ou à celle précédemment calculée au noeud voisin) ; cette valeur, portée dans l'argument de la tangente hyperbolique du second membre de la relation ci-dessus, donne au premier membre une nouvelle valeur, laquelle est reportée à son tour dans le second membre et ainsi de suite, jusqu'à ce que deux valeurs successives diffèrent de moins de $1/1000^e$. La dernière valeur obtenue est alors prise comme vraie valeur.

β4) Dérivées de la célérité

Les dérivées partielles de la célérité par rapport à x et y sont évaluées au noeud (I, J) à partir des huit valeurs de C_{IJ} aux huit noeuds voisins.

On peut, en effet, écrire en première approximation avec les notations du tableau et en utilisant les indices $I \pm 1/2$ et $J \pm 1/2$ pour désigner le milieu des mailles :

$$\begin{aligned} (CX)_{IJ} &= (C_{I+1, J} - C_{I-1, J})/2 \\ (CY)_{IJ} &= (C_{I, J+1} - C_{I, J-1})/2 \\ (C^2X)_{IJ} &= (CX)_{I+1/2, J} - (CX)_{I-1/2, J} = C_{I+1, J} - 2C_{IJ} + C_{I-1, J} \\ (C^2Y)_{IJ} &= (CY)_{I, J+1/2} - (CY)_{I, J-1/2} = C_{I, J+1} - 2C_{IJ} + C_{I, J-1} \\ (C^2XY)_{IJ} &= ((CX)_{I, J+1} - (CX)_{I, J-1})/2 = (C_{I+1, J+1} - C_{I-1, J+1} - C_{I+1, J-1} + C_{I-1, J-1})/4 \end{aligned}$$



β5) Evaluation des diverses quantités en un point quelconque

Pour le tracé des orthogonales et le calcul de l'amplitude, nous aurons besoin de connaître en un point quelconque du plan la profondeur, la célérité et ses dérivées, dont seules les valeurs aux noeuds du quadrillage sont connues de la machine. Nous procéderons dans ce but à une double interpolation de la façon suivante (figure ci-contre) :

Soient X_L , Y_L les coordonnées du point M où l'on veut évaluer la célérité E_L par exemple ; soient I et J les parties entières de X_L et Y_L . Les valeurs de la célérité aux quatre noeuds de la maille $ABCD$ voisins sont C_{IJ} , $C_{I+1, J}$, $C_{I, J+1}$, $C_{I+1, J+1}$.

Soient E , F , G , H les intersections de AB , BC , CD et DA avec les parallèles aux axes Ox et Oy passant par M .

En interpolant linéairement entre A et D et entre B et C , on obtient une valeur en H et une valeur en F . Une nouvelle interpolation entre H et F donne la valeur en M .

En utilisant le même processus entre A et B, puis C et D et enfin entre E et G, on trouverait la même valeur. Cette valeur est donnée par la formule :

$$E_L = M_4 C_{IJ} - M_3 C_{I,J+1} + M_1 C_{I+1,J+1} - M_2 C_{I+1,J}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} M_1 = M_0 N_0 \\ M_2 = M_1 - M_0 \\ M_3 = M_1 - N_0 \\ M_4 = M_2 - N_0 + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} M_0 = X_L - \text{partie entière de } X_L \\ N_0 = Y_L - \text{partie entière de } Y_L \end{cases}$$

Ceci revient à prendre une valeur moyenne des valeurs aux quatre coins ABCD, pondérées par les coefficients M_1, M_2, M_3, M_4 qui caractérisent la position du point M à l'intérieur de la maille.

Cette méthode d'interpolation croisée sera utilisée pour l'évaluation des sept quantités $F_L, E_L, (CX)_L, (CY)_L, (C^2X)_L, (C^2Y)_L, (C^2XY)_L$.

γ) Tracé des orthogonales

Le tracé d'une orthogonale est obtenu par le calcul successif des coordonnées d'une suite de points de cette orthogonale, points régulièrement espacés de Δt dans le temps. Les coordonnées de chacun de ces points repérés par un indice entier L croissant à partir de 1 sont calculées à partir de celles du point précédent d'indice L-1 par approximations successives à l'aide de l'équation différentielle (1) du paragraphe précédent, qui s'écrit :

$$\gamma_L = \frac{d\alpha_L}{dt} = (CX)_L \sin \alpha_L - (CY)_L \cos \alpha_L \quad (12)$$

La méthode utilisée est la suivante : soient X_L, Y_L les coordonnées connues du point (L) d'indice L et α_L l'angle correspondant de l'orthogonale avec Ox, également connu.

On cherche les quantités $X_{L+1}, Y_{L+1}, \alpha_{L+1}$ identiques au point (L+1) d'indice L + 1 situé à la distance temporelle Δt du point (L).

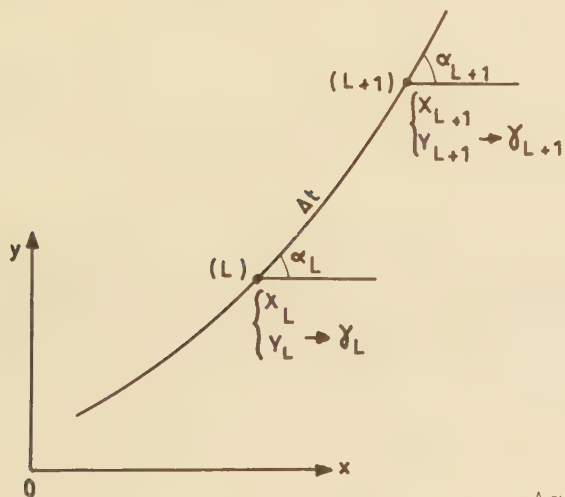
La valeur γ_L de $d\alpha/dt$ au point (L) nous est donnée par l'équation différentielle à partir des valeurs de $(CX)_L, (CY)_L$ et α_L .

En supposant la dérivée de α par rapport à t et la célérité constantes le long de l'arc Δt et égales respectivement à leurs valeurs γ_L et E_L au point (L), on obtient une première valeur de la variation d'angle :

$$\Delta\alpha = \gamma_L \Delta t$$

De cet accroissement, on déduit une première valeur de X_{L+1}, Y_{L+1} et α_{L+1} :

$$\begin{cases} X_{L+1} = X_L + \lambda \Delta t \cos \varepsilon \\ Y_{L+1} = Y_L + \lambda \Delta t \sin \varepsilon \\ \alpha_{L+1} = \alpha_L + \Delta\alpha \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \alpha_L + \Delta\alpha/2 \quad \text{et} \quad \lambda = E_L$$



Ces valeurs reportées dans l'équation différentielle (12) permettent d'obtenir une première valeur de γ_{L+1} , dérivée de α au point $(L + 1)$.

Cette première valeur est utilisée pour recommencer le même processus en supposant toujours la dérivée de α constante le long de Δt , mais cette fois égale à la moyenne entre sa valeur γ_L au point (L) et sa première valeur γ_{L+1} trouvée au point $(L+1)$.

On obtient ainsi une nouvelle valeur de $\Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha = \varphi\Delta t \quad \text{avec} \quad \varphi = (\gamma_L + \gamma_{L+1})/2$$

En prenant comme célérité la moyenne entre sa valeur E_L au point (L) et celle E_{L+1} au premier point $(L + 1)$ trouvé, on obtient de nouvelles valeurs de X_{L+1} , Y_{L+1} et α_{L+1} .

$$\left| \begin{array}{l} X_{L+1} = X_L + \lambda\Delta t \cos \varepsilon \\ Y_{L+1} = Y_L + \lambda\Delta t \sin \varepsilon \\ \alpha_{L+1} = \alpha_L + \Delta\alpha \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \lambda = (E_L + E_{L+1})/2$$

Ces dernières valeurs seront prises comme vraies valeurs de X_{L+1} , Y_{L+1} et γ_{L+1} et serviront de base au calcul du point suivant.

Les valeurs de E_L , $(CX)_L$, $(CY)_L$ utilisées dans l'équation différentielle sont celles obtenues par la méthode d'interpolation définie précédemment.

δ) Calcul du coefficient de réfraction

δ1) Calcul de K_1

Comme nous l'avons vu, le coefficient K_1 est déterminé par l'intermédiaire du coefficient β , lui-même solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + p \frac{d\beta}{dt} + q\beta = 0 \quad (13)$$

Cette équation peut être résolue numériquement par deux méthodes différentes : la méthode de Kelvin et la méthode des différences finies.

Méthode de Kelvin

Elle consiste à tracer la courbe Γ donnant β en fonction de t par une méthode identique à celle utilisée pour construire les orthogonales, en progressant avec le même pas dans le temps Δt de manière à calculer l'amplitude aux points mêmes qui servent à tracer les orthogonales et les crêtes. Nous emploierons le même indice L de repérage.

L'angle θ de la tangente à la courbe Γ avec l'axe Ot est donné par :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{d\beta}{dt}$$

Cette relation portée dans l'équation différentielle (13) donne :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -p \operatorname{tg} \theta + q\beta$$

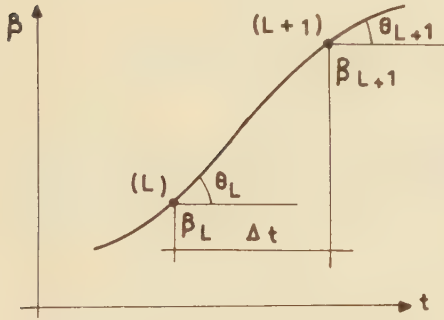
La même relation dérivée devient :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\beta}{dt^2} \cos^2\theta$$

En groupant les deux dernières formules il vient :

$$\delta = \frac{d\theta}{dt} = - (p \sin\theta + q\beta \cos\theta) \cos\theta \quad (14)$$

p et q étant fonction des seules valeurs de E_L , $(CX)_L$, $(CY)_L$, $(C^2X)_L$, $(C^2Y)_L$, $(C^2XY)_L$, α_L au point (L) de l'orthogonale.



La connaissance des valeurs β_L et θ_L de β et θ en ce même point permet de calculer la valeur de la dérivée de θ par rapport à t . La façon de procéder est alors la suivante :

Soient β_L et θ_L les valeurs de β et θ au point (L) . On cherche à déterminer les valeurs des mêmes quantités β_{L+1} , θ_{L+1} au point $(L+1)$.

En supposant la dérivée de θ par rapport à t constante entre les points (L) et $(L+1)$ et égale à sa valeur δ_L au point (L) , on obtient une première valeur de la variation de l'angle θ et de la variation du coefficient β .

$$\theta_{L+1} = \theta_L + \Delta\theta$$

avec :

$$\Delta\theta = -\Delta t(p_L \sin \theta_L + q_L \beta_L \cos \theta_L) \cos \theta_L$$

$$\Delta\beta = \Delta t \operatorname{th} \chi \quad \text{avec} \quad \chi = \theta_L + \Delta\theta/2$$

D'où une première valeur de β_{L+1}

$$\beta_{L+1} = \beta_L + \Delta\beta$$

La valeur δ_{L+1} de la dérivée $d\theta/dt$, au point $(L+1)$, valeur calculée à partir de la première valeur de β_{L+1} , permet de renouveler le processus en supposant toujours la dérivée $d\theta/dt$ constante le long de Δt , mais cette fois égale à la moyenne entre δ_L et δ_{L+1} .

Les nouvelles valeurs de β_{L+1} et θ_{L+1} sont alors prises comme vraies valeurs et servent de base au calcul du point suivant $(L+2)$.

Comme dans le tracé des orthogonales, les valeurs de E_L , $(CX)_L$, $(CY)_L$, $(C^2X)_L$, $(C^2Y)_L$, $(C^2XY)_L$, utilisées pour le calcul de δ_L sont celles obtenues par la méthode d'interpolation décrite précédemment.

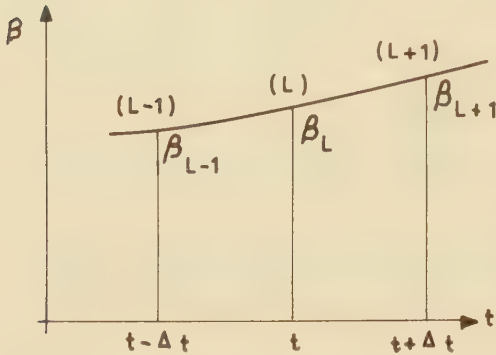
Le point de départ du calcul coïncide avec celui du tracé de l'orthogonale correspondante ; les valeurs initiales que l'on s'y fixe sont $\beta_1 = 1$ et $\theta = 0$.

Méthode des différences finies

Elle consiste à évaluer les dérivées première et seconde de β par rapport à t , en fonction de trois valeurs de β : β_{L-1} , β_L et β_{L+1} correspondant à trois valeurs de t : $t - \Delta t$,

t , et $t + \Delta t$, c'est-à-dire à partir de trois points $(L-1)$, (L) et $(L+1)$, en approchant la courbe Γ par un polynôme du second degré dont la courbe représentative passe par les trois points en question.

On trouve ainsi :



$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = (\beta_{L-1} - 2\beta_L + \beta_{L+1})/(\Delta t)^2$$

$$\frac{d\beta}{dt} = (\beta_{L+1} - \beta_{L-1})/2\Delta t$$

Le report de ces valeurs dans l'équation différentielle (13) permet de trouver une relation donnant β_{L+1} en fonction de β_{L-1} , β_L et des valeurs de p_L et q_L au point (L) , soit :

$$\beta_{L+1} = \frac{(p\Delta t - 2)\beta_{L-1} + 4 - 2q_L(\Delta t)^2\beta_L}{p_L\Delta t + 2} \quad (15)$$

Le procédé de calcul est donc très simple ; on calcule directement β_{L+1} à partir de β_{L-1} , β_L , q_L et p_L . Il suffit de se fixer deux valeurs initiales de β , $\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = 1$, aux points $L = 1$ et $L = 2$, ce qui équivaut à la condition $\beta_1 = 1$ et $(d\beta/dt_1) = 0$ de la méthode de Kelvin.

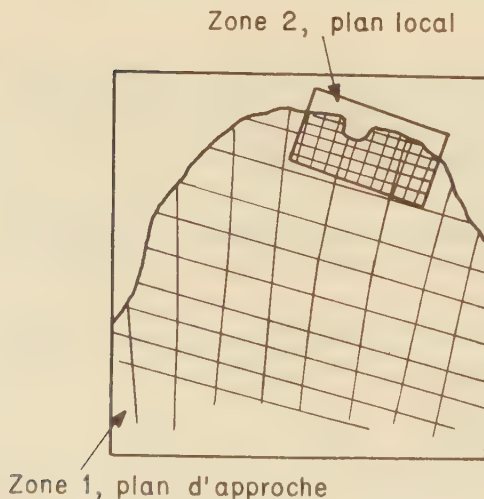
82) Calcul de K_2

Ce coefficient se calcule directement au moyen de la formule (10) qui s'écrit :

$$K_2 = \frac{\text{ch}(2\pi F_L/E_L T)}{[\text{sh}(2\pi F_L/E_L T) \text{ch}(2\pi F_L/E_L T) + 2\pi F_L/E_L T]^{1/2}} \quad (16)$$

La valeur de F_L utilisée est celle obtenue par la méthode d'interpolation.

c) Résultats



Nous avons programmé la méthode décrite ci-dessus sur ordinateur IBM 7094 en langage Fortran ; nous donnons ci-après l'organigramme de la partie calcul de ce programme. A celle-ci s'ajoute la partie logique d'enchaînement ainsi qu'un sous-programme permettant d'obtenir directement le tracé du plan de vagues grâce à une sortie sur traceur de courbes Stromberg Carlson 4020 (figure 2).

Une première version de ce programme permet de déterminer un plan de vagues dans une zone de dimensions maximales 50×50 mailles. La figure 3 donnant un plan de vagues dans le port d'Ajaccio en est un exemple. La figure 4 donne, à titre de comparaison, le même plan de vagues tracé graphiquement.

Une deuxième version permet, par stockage sur bande magnétique des résultats intermédiaires, de déterminer un plan de vagues

dans deux zones imbriquées, chacune de dimensions maximales 50×50 mailles, mais de dimensions de mailles différentes. La première zone fournit les conditions d'approche de la houle, la deuxième zone à plus grande échelle fournit un plan de vagues plus précis et détaillé en un point intéressant du littoral. On obtient ainsi deux plans de vagues appelés réciproquement plan d'approche et plan local. Les figures 5 et 6 en donnent un exemple.

Nous utiliserons ce programme au chapitre IX pour comparer son résultat avec un même plan de vagues relevé au moyen de l'analogie ultrasonore.

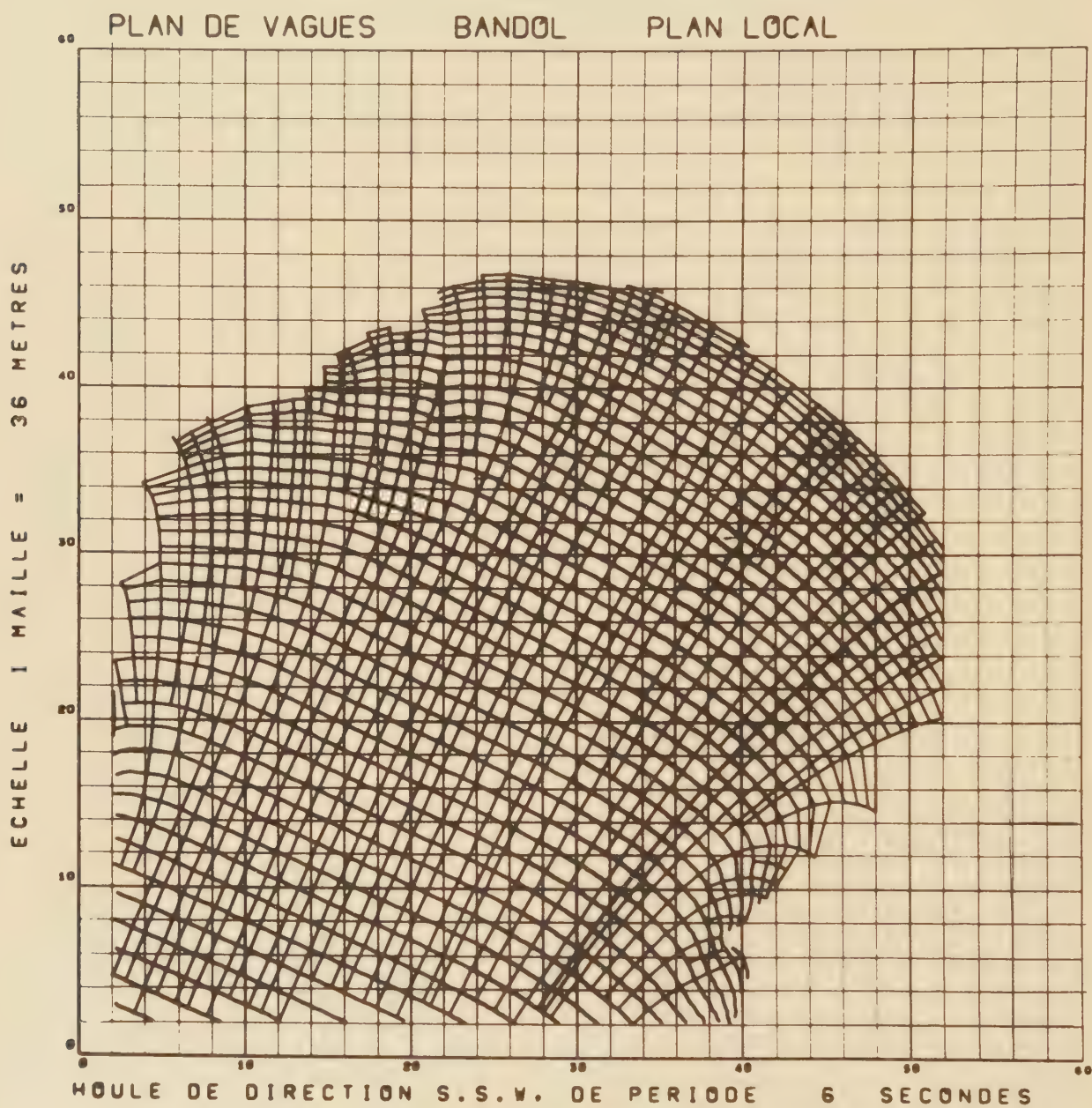


Figure 2 - Sortie d'un plan de vagues sur S.C. 4020

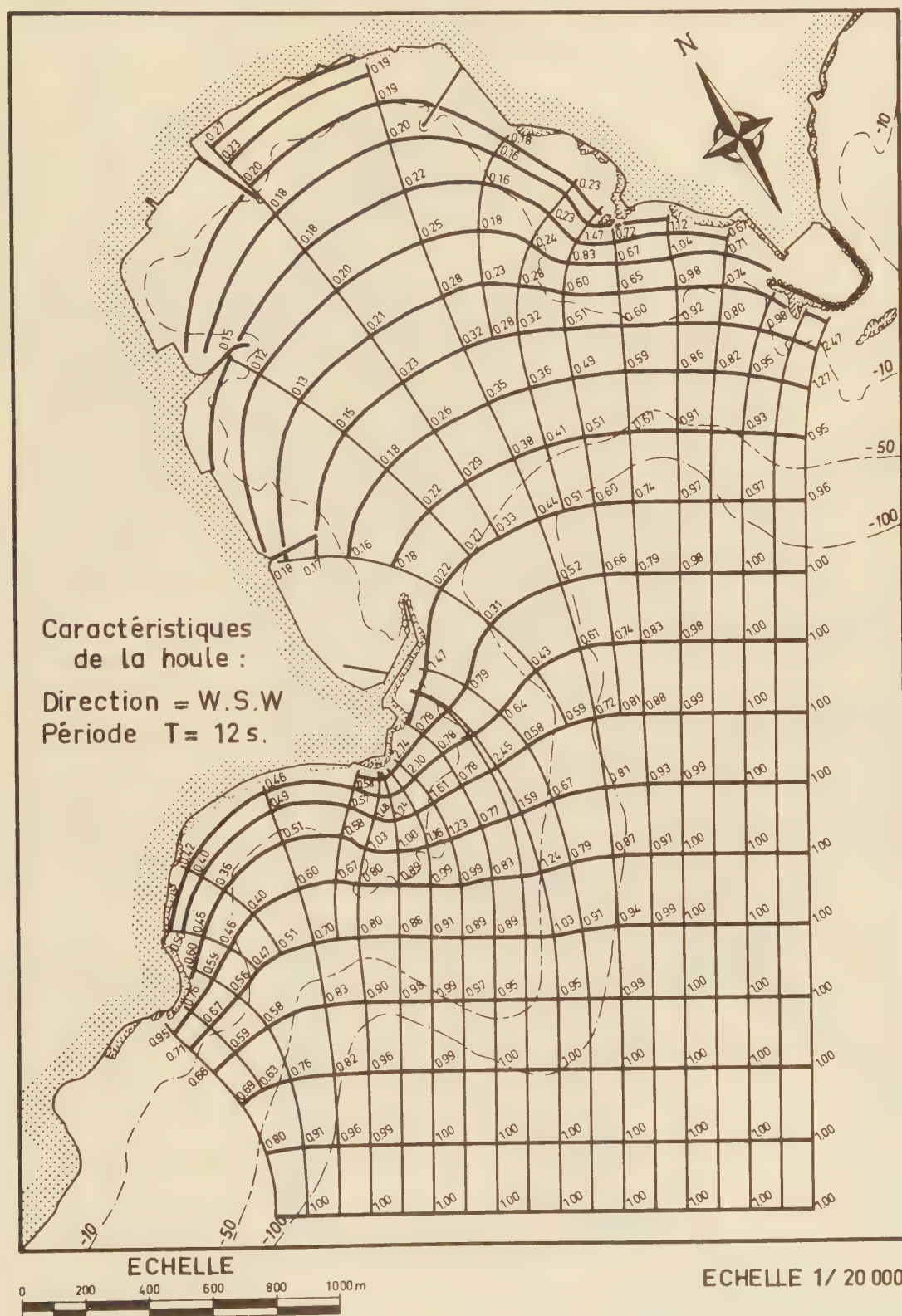


Figure 3 - Réfraction de la houle dans le port d'Ajaccio. Méthode numérique.

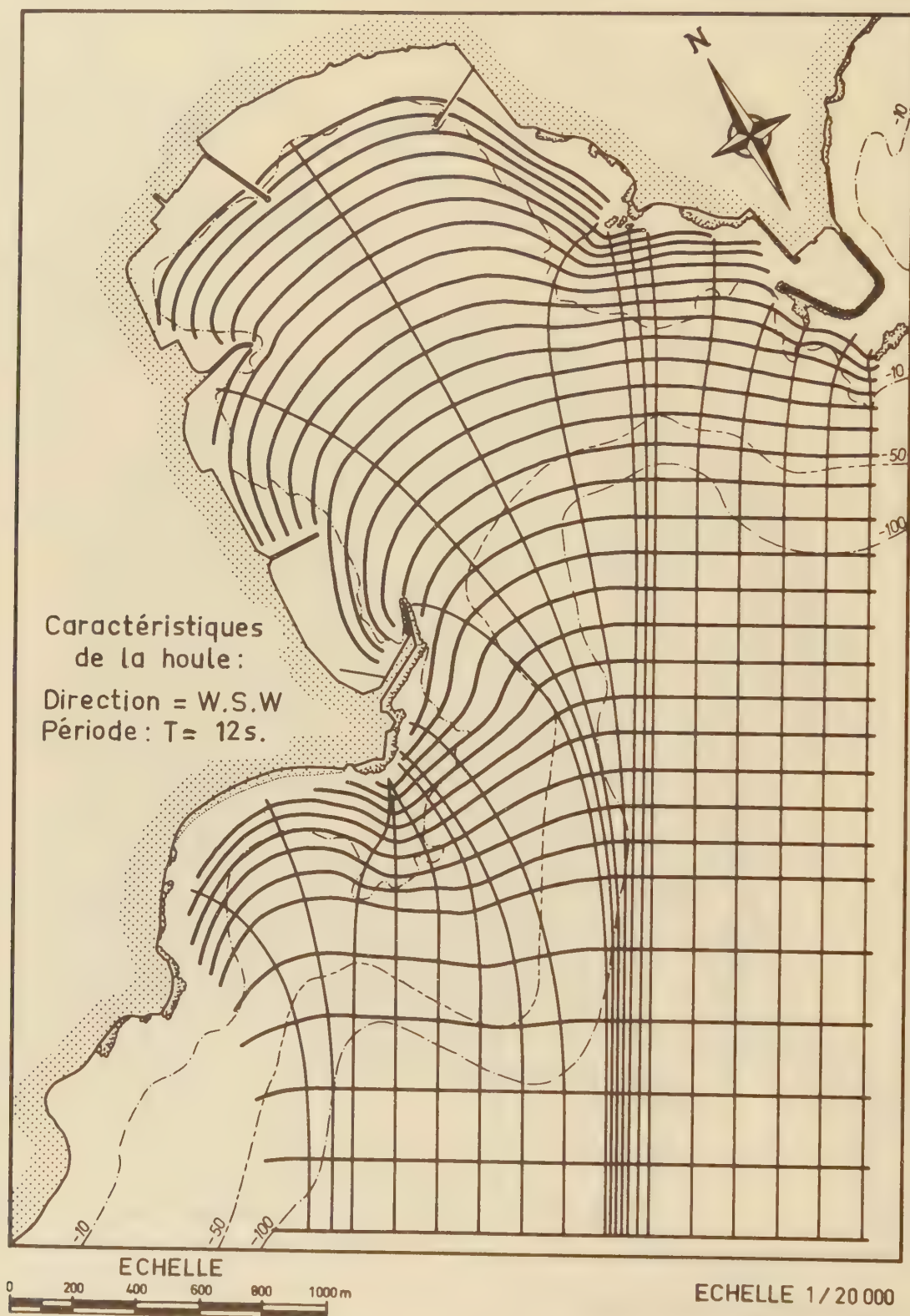


Figure 4 - Réfraction de la houle dans le port d'Ajaccio. Méthode graphique

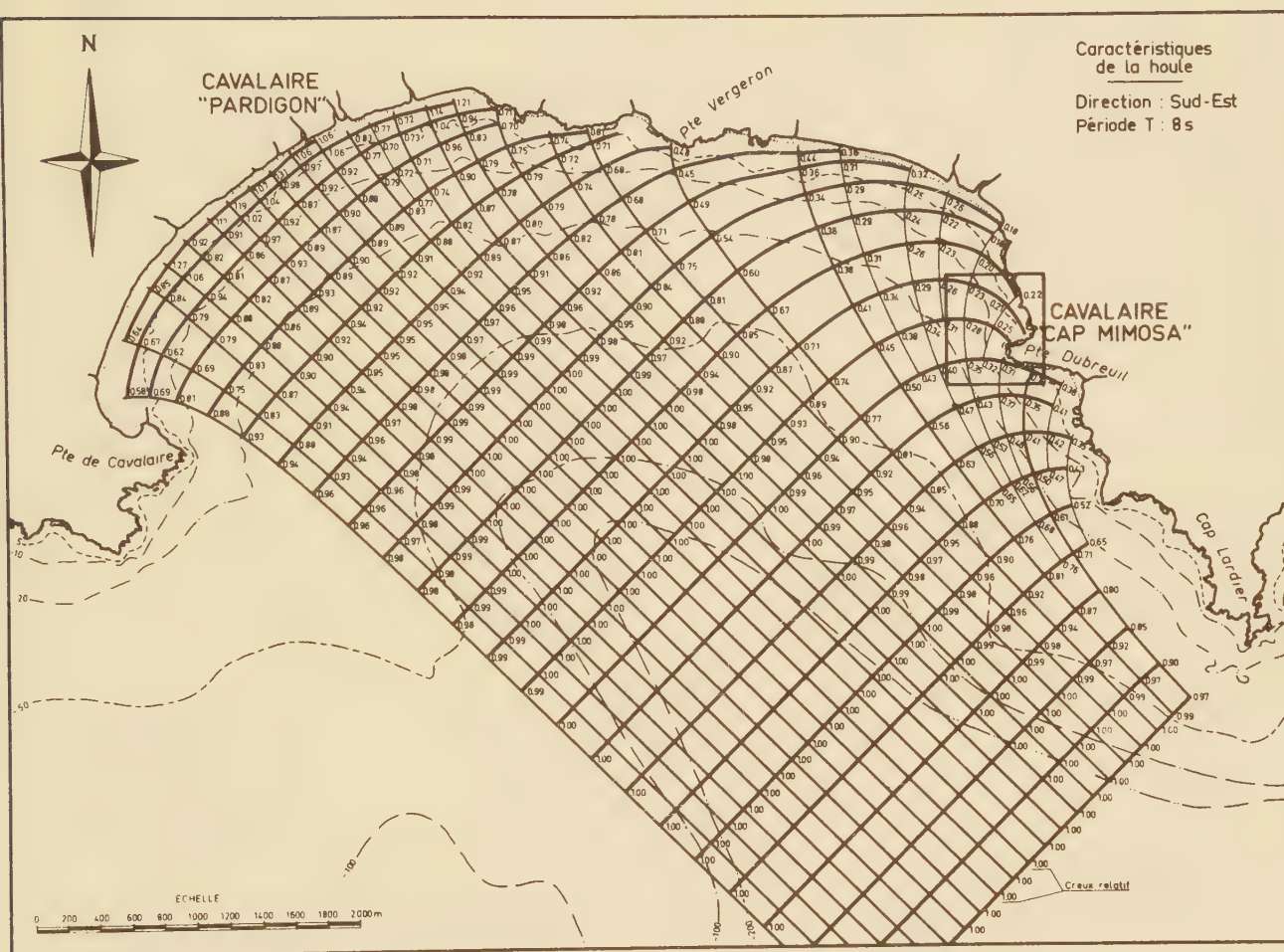


Figure 5 - Réfraction de la houle dans la baie de Cavalaire. Plan d'approche.

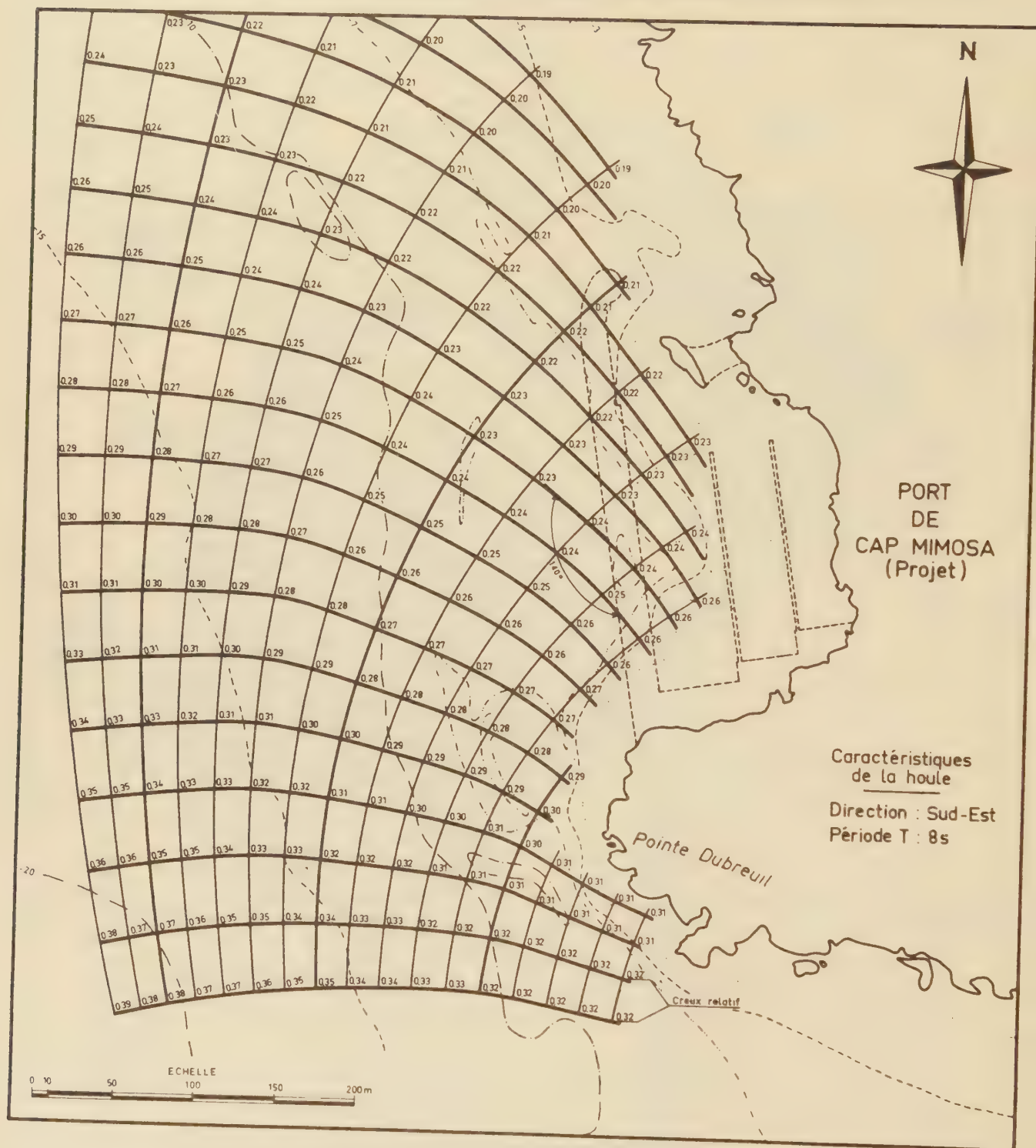
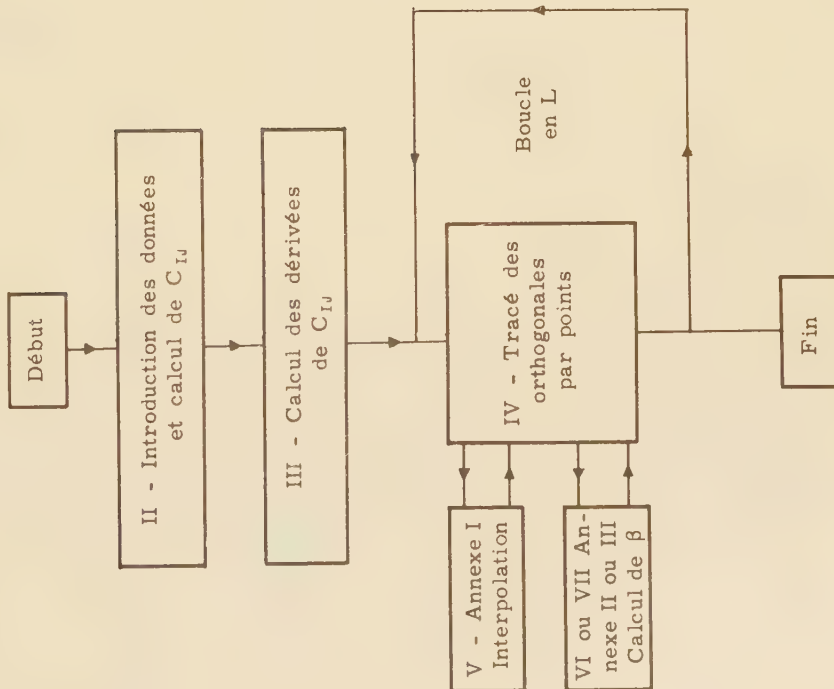
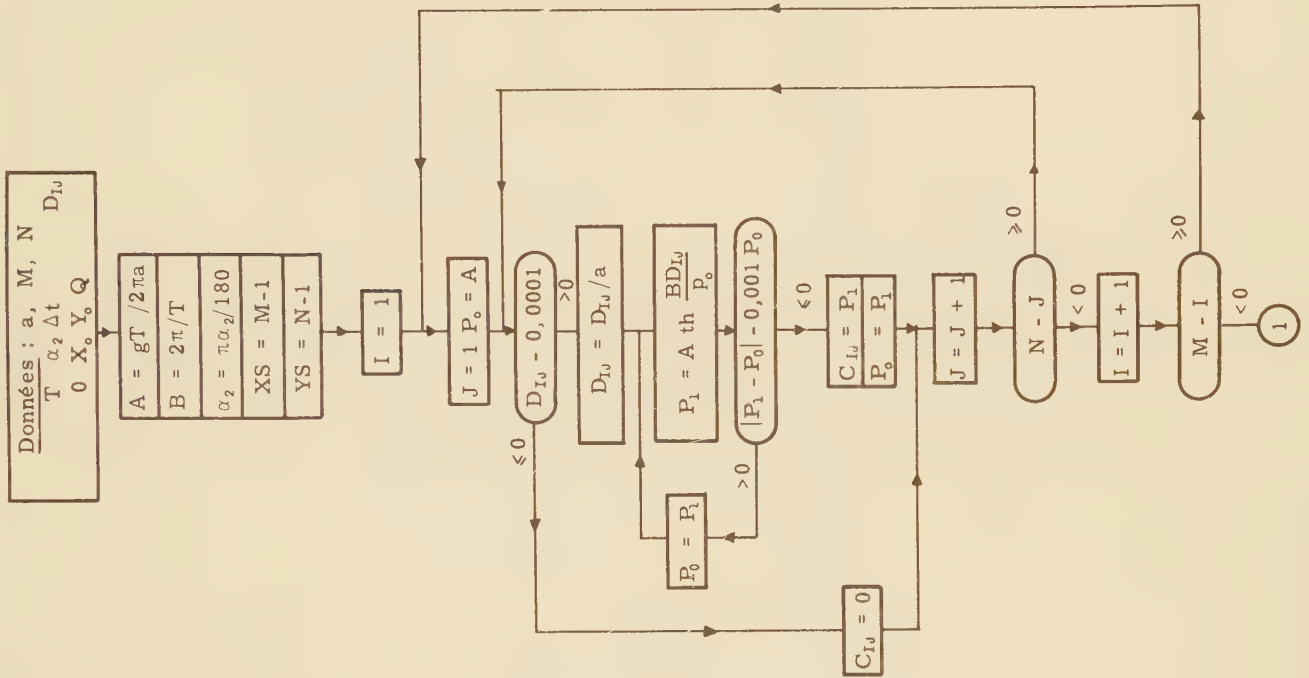
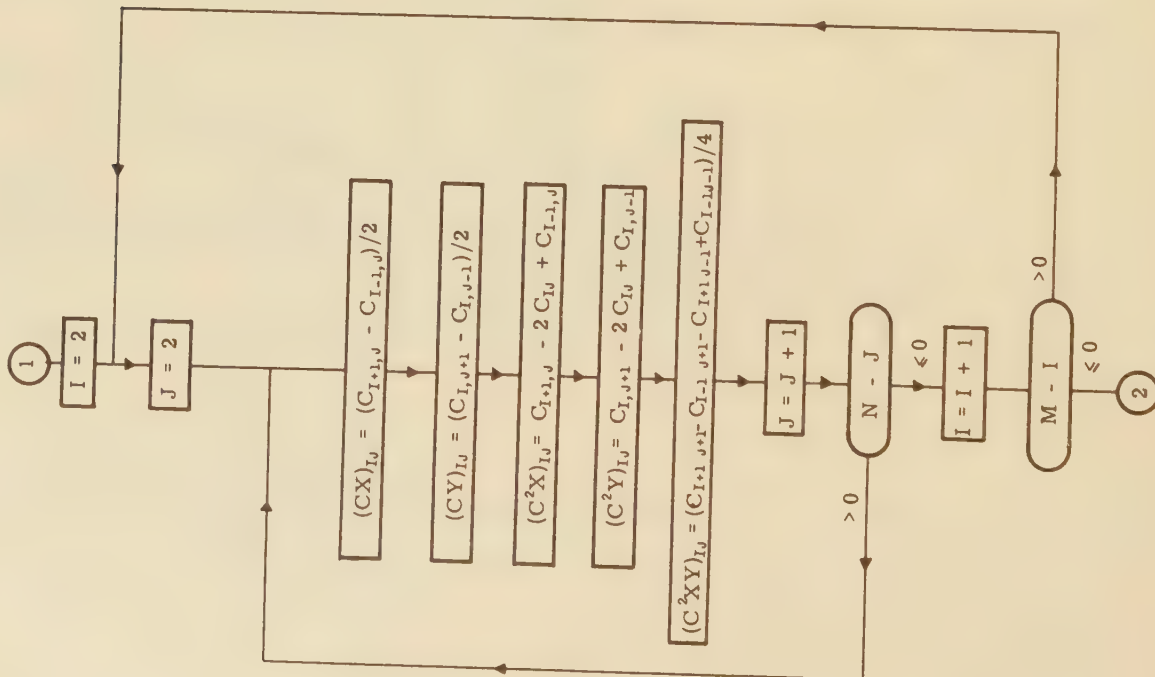


Figure 6 - Réfraction de la houle à Croix Valmer-Cap Mimosa. Plan local.

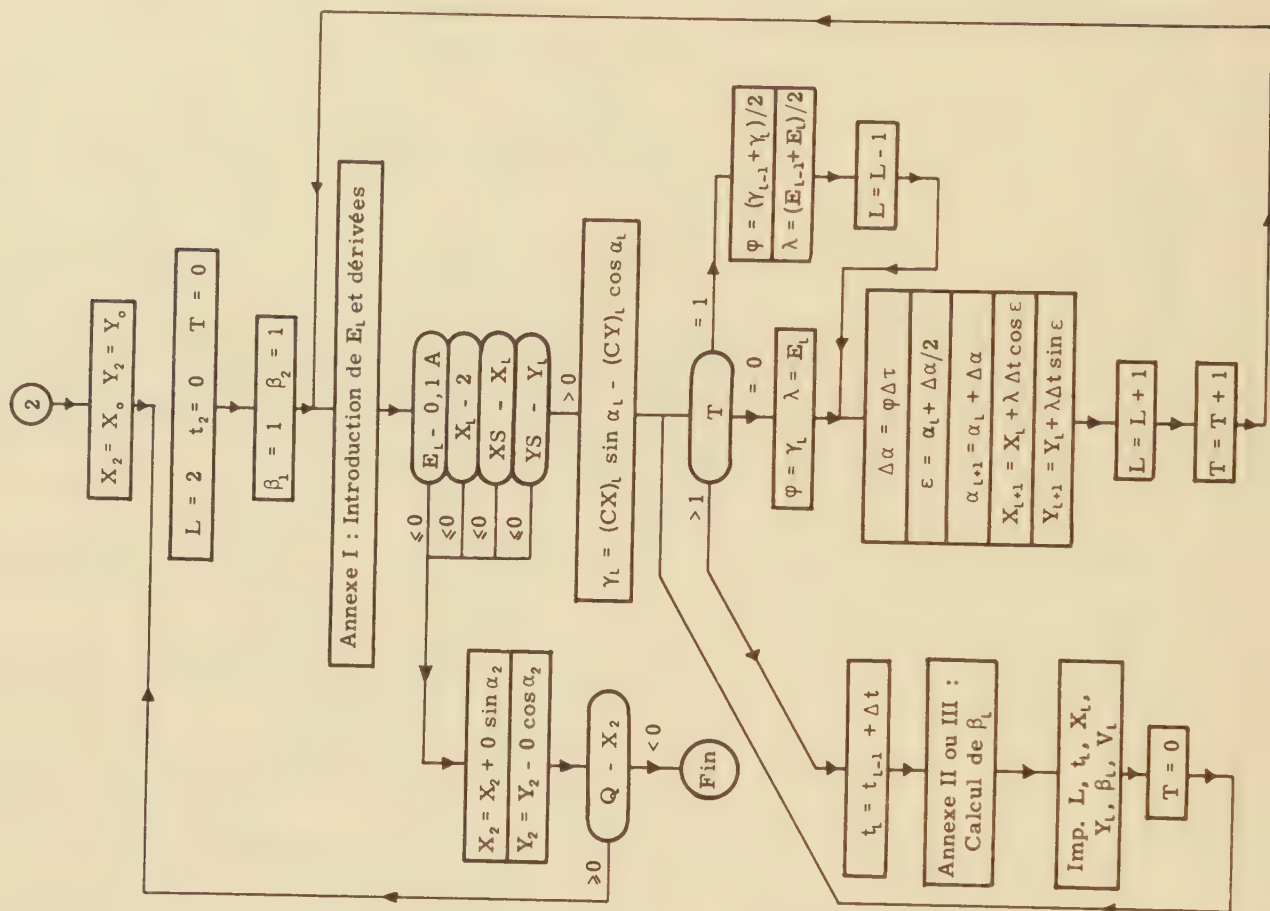
ORGANIGRAMME

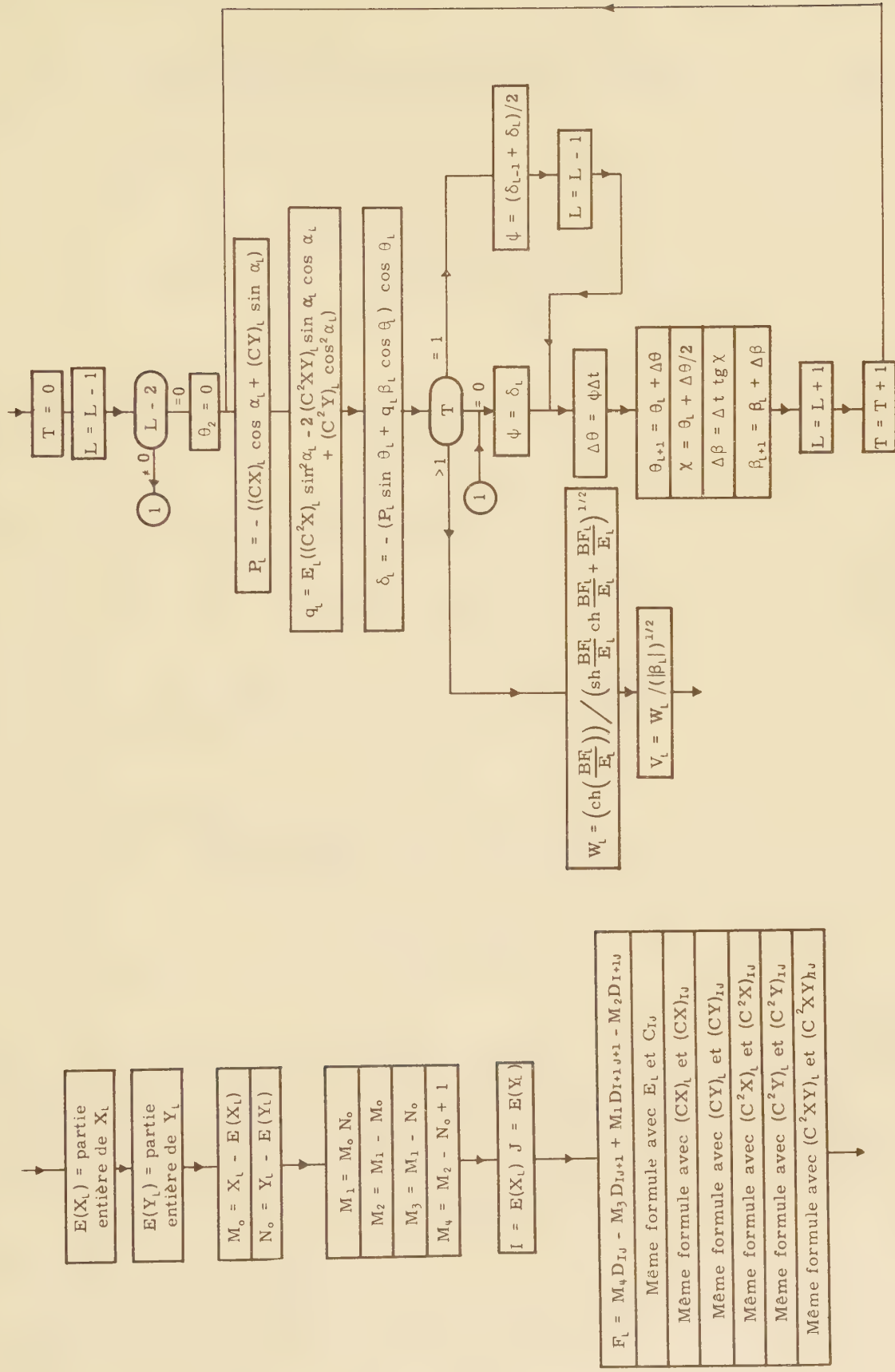
I - Schéma d'ensemble

II - Introduction des données - Calcul de C_{IJ} 

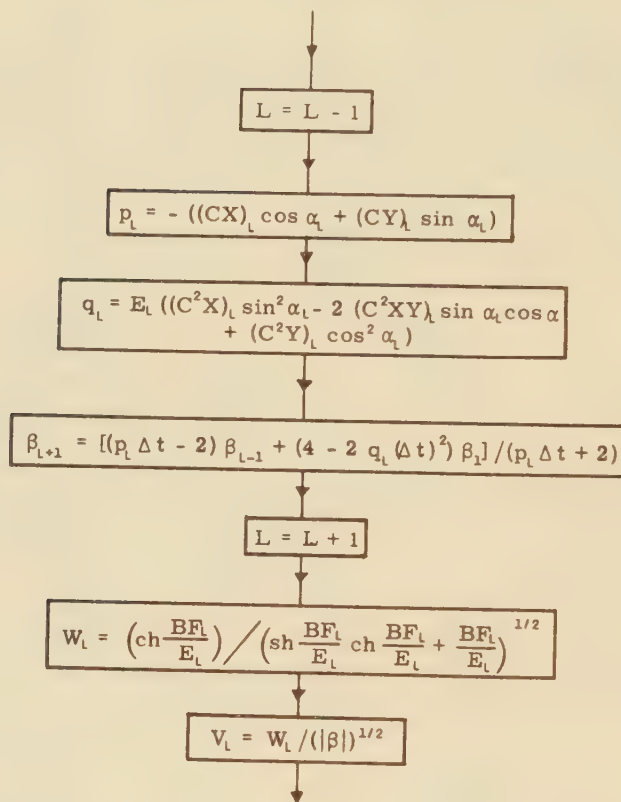
III - Calcul des dérivées de C_{IJ} 

IV - Tracé des orthogonales





VII - Annexe III - Calcul du coefficient de réfraction
Méthode des différences finies



Chapitre III

GÉNÉRALITÉS SUR LES ULTRASONS

PRINCIPALES NOTATIONS PROPRES AU CHAPITRE III

λ, μ	: coefficients de Lamé
E	: module d'Young
δ	: module piézo-électrique
α	: coefficient d'amortissement
p	: pression acoustique
I	: intensité
P	: puissance
W	: énergie
ρc	: impédance acoustique
e	: épaisseur du cristal
γ_s	: rapport des chaleurs spécifiques
B	: compressibilité à température constante
K	: conductibilité thermique
C_p	: chaleur spécifique à pression constante
A	: amplitude de vibration
u	: amplitude de vitesse

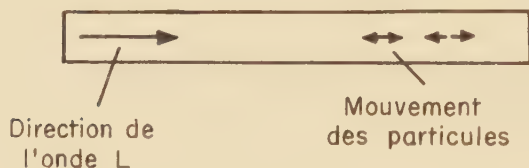
On désigne sous le nom d'ondes ultrasonores les ondes élastiques dont la fréquence est supérieure au domaine d'audition d'une oreille humaine normale, c'est-à-dire supérieure à environ 20 000 cycles/seconde (20 kHz). Le domaine des ultrasons est considérable puisque on a réussi à produire des ondes de fréquence allant jusqu'à 500 mégacycles. Leurs applications pratiques deviennent de plus en plus nombreuses. Nous citerons parmi celles-ci : les mesures de distance, la détection d'obstacles, les essais non destructifs de matériaux, le nettoyage, la thérapeutique etc...

1 - DIFFÉRENTS TYPES D'ONDES

Les ondes ultrasonores planes se propagent en milieu infini suivant les deux types prévus par la théorie des ondes élastiques (comme nous le verrons au chapitre V) :

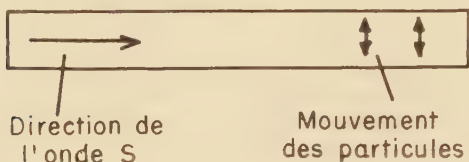
- D'une part, les *ondes de dilatation* appelées plus simplement *ondes longitudinales*, qui ne comportent pas de rotation et pour lesquelles les trajectoires des particules sont parallèles à la direction de propagation.
- D'autre part, les *ondes de distorsion* appelées plus simplement *ondes de cisaillement*, qui ne comportent pas de dilatation et pour lesquelles les trajectoires des particules sont perpendiculaires à la direction de propagation.

a - Ondes longitudinales



ONDES LONGITUDINALES

vibration à une fréquence ultrasonore d'une surface du milieu perpendiculaire à la direction de propagation.



ONDES DE CISAILLEMENT

tériaux ne présentent pas d'élasticité au cisaillement. On peut les produire en appliquant une force de cisaillement à une face du milieu. La vibration se faisant dans une direction déterminée, on peut constater des effets de polarisation.

Ce type d'ondes est généralement désigné par le symbole L. Il a été jusqu'à présent le plus souvent utilisé en ce qui concerne les ultrasons parce qu'il se propage dans les liquides, les solides et les gaz et qu'il est facile de le produire et de le détecter.

Les ondes longitudinales ont une vitesse de propagation élevée dans la plupart des milieux. Elles peuvent être produites par la

b - Ondes transversales ou de cisaillement

Ces ondes généralement désignées par le symbole S se propagent avec une célérité qui est approximativement la moitié de celle des ondes L ; elles ont donc une longueur d'onde plus courte.

Les ondes S ne se propagent pas dans les liquides ni dans les gaz, puisque ces matériaux ne présentent pas d'élasticité au cisaillement. On peut les produire en appliquant une force de cisaillement à une face du milieu. La vibration se faisant dans une direction déterminée, on peut constater des effets de polarisation.

c - Ondes composées

Quand le milieu élastique présente des dimensions finies, la propagation des ondes est influencée par les conditions aux limites et on peut avoir toutes sortes de types d'ondes, parmi lesquels nous citerons :

- les ondes de Rayleigh qui se propagent à l'interface entre deux milieux et en particulier à la surface d'une plaque élastique,
- les ondes de Lamb qui se propagent à l'intérieur d'un milieu limité par deux surfaces libres parallèles et d'épaisseur comparable à la longueur d'onde.

α) Ondes superficielles ou de Rayleigh

Le mouvement des particules dans ces ondes est limité au voisinage de la surface du matériau. Les trajectoires sont des ellipses, comme nous le verrons plus loin, c'est-à-dire que le mouvement est composé de mouvements élémentaires des types L et S ; elles sont analogues aux ondes qui se propagent à la surface libre d'un récipient contenant de l'eau. Leur célérité, est à peu près égale aux neuf dixièmes de la vitesse de l'onde S.

β) Ondes de Lamb

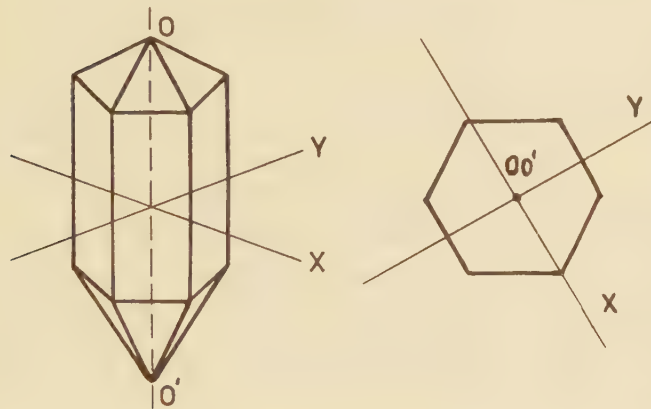
Comme dans les ondes de Rayleigh, les trajectoires sont des ellipses, mais le mouvement s'étend à toute l'épaisseur du milieu. Leur célérité varie en fonction de cette épaisseur et, comme nous le verrons, il en existe plusieurs modes.

2 - PROPRIÉTÉS DES ONDES L ET S EN MILIEU INFINI

a - Production de l'onde

Les deux principales façons de produire des ondes ultrasonores consistent à utiliser soit un générateur *magnétostrictif* dont le domaine d'utilisation va de 5 à 60 kilocycles environ, soit un générateur *piézo-électrique* utilisable pour des fréquences supérieures à 20 kilocycles. Nous ne nous intéresserons qu'à ce dernier type, puisque c'est dans sa gamme de fréquences que nous comptons travailler. Nous signalerons simplement que l'effet magnétostrictif utilisé dans le premier type consiste en une variation de longueur d'un barreau métallique sous l'action d'un champ magnétique variable.

α) Effet piézo-électrique



Les générateurs piézo-électriques sont basés sur l'effet piézo-électrique du quartz et d'autres cristaux dont le sel de Rochelle utilisé en signalisation sous-marine. Rappelons que l'on appelle effet piézo-électrique la production par certains cristaux de charges électriques sous l'action d'une pression ou d'une tension mécanique. Pour le quartz, la production par une pression dirigée suivant l'axe X d'une charge sur les surfaces du cristal perpendiculaires à cet axe est appelée effet longitudinal direct. La production des mêmes charges par une pression dirigée suivant l'axe Y s'appelle effet transverse direct. Ces axes X et Y sont liés

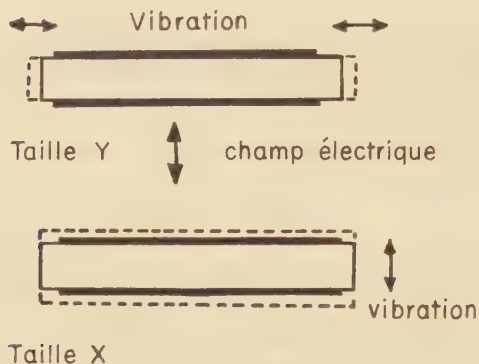
au cristal de quartz. Ils sont perpendiculaires à l'axe optique OO'.

Les cristaux dotés de l'effet piézo-électrique sont également pourvus de l'effet piézo-électrique inverse qui est la production de tensions sous l'effet de charges électriques appliquées.

Ces deux effets permettent la réalisation de transducteurs à quartz à deux rôles : l'effet inverse permet l'émission d'ultrasons sous l'action d'une tension électrique alternative appliquée au cristal au moyen d'électrodes métalliques ; l'effet direct permet l'utilisation des mêmes cristaux pour la réception des ultrasons et leur transformation en tension électrique alternative.

Suivant la direction de taille du cristal par rapport aux axes X et Y, on peut en obtenir deux sortes :

- ceux à taille X, vibrant dans la direction parallèle au champ électrique et utilisés pour produire les ondes L,
- ceux à taille Y, vibrant dans la direction perpendiculaire au champ électrique et utilisés pour produire des ondes S.



L'effet piézo-électrique est très accentué par l'entrée en résonance du quartz. C'est pourquoi, en pratique un transducteur est toujours utilisé à la fréquence pour laquelle il a été construit ou à un harmonique supérieur comme c'est le cas lorsque l'on désire produire des fréquences supérieures à 10 mégacycles, les cristaux accordés sur le fondamental devenant beaucoup trop minces et fragiles. Seuls les harmoniques impairs sont excités convenablement (les harmoniques pairs sont faibles).

L'effet piézo-électrique d'un matériau est caractérisé par son module piézo-électrique que l'on mesure expérimentalement. Ce module est une indication de l'efficacité de la conversion électromécanique dans l'effet direct comme dans l'effet inverse. C'est une constante pour un matériau donné. Sa valeur pour le quartz est $\delta = 6,32 \times 10^{-2}$ unités électrostatiques/kg (pour une tension de 3000 volts, la dilatation est de $6,36 \times 10^{-7}$ cm).

Les cristaux de quartz donnent de bons résultats, mais ils ont deux inconvénients : ils sont fragiles en faible épaisseur et leur fréquence de résonance varie lentement en fonction de la température.

Cette variation est caractérisée par un coefficient de température donné par la formule :

$$\text{Coef. de temp.} = \frac{\Delta f}{f_o (T_{\max} - T_{\min})}$$

$T_{\max}, T_{\min}$: températures
max et min d'utilisation
 f_o : fréquence normale
 Δf : variation de fréquence
entre $T_{\max}$ et $T_{\min}$

Sa valeur pour la taille X est : 15 à 25 cycles/mégacycle/degré centigrade.

β) Forme et taille des cristaux

Les cristaux peuvent être taillés ronds, carrés ou parallélépipédiques ou de toute forme convenable. Les cristaux ronds vibrent plus énergiquement et ont une répartition de puissance sur leur surface plus régulière. Les cristaux parallélépipédiques sont utilisés pour la production d'ondes planes.

L'épaisseur de la lame de quartz est ajustée en fonction de la fréquence fondamentale qui, dans le cas de la taille X, correspond à une résonance suivant l'épaisseur du cristal qui est égale à une demi-longueur d'onde.

La célérité des ultrasons dans le quartz étant $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5,40 \times 10^5$ cm/s, on trouve compte tenu de la relation $e = \lambda/2$

$$f = \frac{c}{2e} = \frac{2,7}{e} \quad \begin{array}{l} e : \text{épaisseur du cristal en mm} \\ f : \text{fréquence en mégacycles} \end{array}$$

Les mesures expérimentales donnent plutôt la formule :

$$f = \frac{2,87}{e}$$

f Kc	e mm
100	28,70
200	14,35
500	5,74
1 000	2,87
5 000	0,574

Cette différence est probablement due à des vibrations parasites dans des directions perpendiculaires.

Le tableau ci-contre donne quelques épaisseurs pour les fréquences courantes.

γ) Montage, assemblage de cristaux

Pour être utilisés, les cristaux sont munis d'électrodes métalliques soit par métallisation, soit par collage de minces feuilles. Ils sont ensuite montés dans des supports leur permettant de vibrer librement.

Leur couplage au milieu dans lequel on désire produire les ultrasons est assuré par simple immersion dans le cas où ce milieu est liquide, ou par un liquide couplant destiné à assurer un bon contact (huile, glycérine, mercure) si le milieu est solide.

Lorsque l'on désire une surface active importante, on peut associer plusieurs cristaux côte à côte pour former une mosaïque. Le couplage avec le milieu ambiant peut être assuré par un diaphragme qui vibre d'une seule pièce et répartit l'énergie.

b - Célérités - Longueurs d'ondes

Nous distinguerons les vitesses de phase et de groupe. Nous ne reviendrons pas sur les définitions de ces vitesses qui sont fort connues. Rappelons cependant que l'on utilise la notion de vitesse de groupe pour caractériser la vitesse avec laquelle se déplace l'enveloppe de l'onde lorsque celle-ci est modulée en amplitude, c'est-à-dire avec laquelle se propage l'énergie.

Cette vitesse de groupe est différente de la vitesse de phase lorsque le milieu est dispersif, c'est-à-dire lorsque la vitesse de phase dépend de la fréquence de l'onde.

On ne sait pas si les ondes ultrasonores en milieu infini sont dispersives ou non ; les théories donnant leur vitesse de phase semblent prouver que non ; en tous cas, si celle-ci varie en fonction de la fréquence, elle varie peu.

La vitesse de phase des ondes longitudinales est donnée par :

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

Celle des ondes de cisaillement par :

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} E : \text{module d'Young} \\ \lambda \text{ et } \mu : \text{constantes de Lamé} \\ \nu : \text{coefficient de Poisson} \\ \rho : \text{masse spécifique du milieu} \end{array} \right.$$

Cette dernière est d'environ 48 % de la vitesse de l'onde longitudinale. La longueur d'onde s'en déduit immédiatement par la formule habituelle :

$$\Lambda = \frac{c}{f} \quad f = \text{fréquence}$$

Le tableau ci-après donne, pour les corps solides courants, les valeurs de la célérité des ondes longitudinales, l'impédance acoustique qui est le produit de la célérité par la densité, et les longueurs d'onde à la fréquence de 500 kc. Nous y avons adjoint

quelques corps liquides et gazeux pour lesquels la célérité est donnée par :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho B}}$$

γ : rapport des chaleurs
spécifiques

B : compressibilité à température
constante

Matériau	Célérité m/s	Densité	Impédance $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$ acoustique	Longueur d'onde en cm (f = 500 kc)
Aluminium	$6,22 \times 10^3$	2,65	$1,70 \times 10^7$	1,244
Cuivre	$4,62 \times "$	8,93	$4,11 \times "$	0,294
Acier	$5,81 \times "$	7,80	$4,76 \times "$	1,162
Verre	$4,9-5,9 "$	2,5 - 5,9	$1,805 \times "$	1,040
Quartz	$5,75 \times "$	2,65	$1,52 \times "$	1,150
Polystyrène	$2,67 \times "$	1,10	$0,294 \times "$	0,534
Plexiglas	$2,68 \times "$	1,19	$0,319 \times "$	0,536
Alcool	$1,44 \times "$	0,79	$0,147 \times "$	0,288
Eau	$1,43 \times "$	1,00	$0,143 \times "$	0,290
Huile	$1,39 \times "$	0,92	$0,128 \times "$	0,278
Air	$0,331 \times "$	0,0012	$0,0000413 \times 10^7$	0,0688

c - Energie

L'intensité d'une onde ultrasonore est donnée par :

$$I = \frac{1}{2} \rho c (\omega A)^2 = \frac{1}{2} p u$$

A : amplitude maximale de la vibration

p : pression acoustique

u : amplitude de vitesse de la particule élémentaire

d - Trajectoires des particules

Dans les ondes L et S en milieu infini, les trajectoires des particules sont des segments de droite, parallèles à la direction de propagation dans les ondes L, perpendiculaires dans les ondes S. La longueur de ces segments, égale au double de l'amplitude du mouvement, dépend pour un milieu donné de la puissance acoustique de l'émetteur et de la fréquence.

Dans un liquide on a :

$$I = \frac{1}{2} \rho c A^2 \omega^2$$

$$A = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{2I}{\rho c}}$$

ω : $2\pi f$ = pulsation

A : amplitude

ρc : impédance acoustique du milieu

I : puissance par unité de surface
du transducteur = intensité

Le tableau suivant à double entrée donne quelques valeurs de l'amplitude exprimée en microns en fonction de la puissance et de la fréquence, dans du plexiglas.

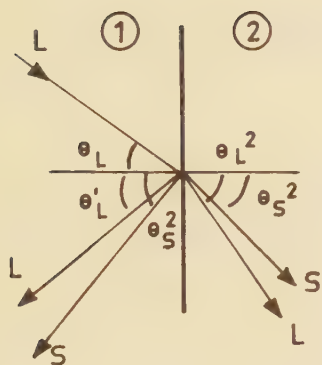
$f \backslash P/S$	1kHz	100 kHz	500 kHz	1 MHz
1 W/cm ²	13	0,13	0,026	0,013
5 W/cm ²	29	0,29	0,058	0,029
10 W/cm ²	42	0,42	0,084	0,042

e - Réfraction - Réflexion

Comme toutes les ondes, les ultrasons sont soumis à des phénomènes de réflexion ou de réfraction au passage entre deux milieux.

Mais dans les milieux solides l'existence des deux types d'ondes L et S complique le phénomène, car à la surface de séparation il y a transformation d'un type d'onde dans l'autre et réciproquement.

Dans le cas le plus général, une onde d'un des deux types se divisera à la surface de séparation entre deux milieux ① et ② en deux ondes réfléchies L et S et deux ondes réfractées L et S.



La relation entre les différents angles d'incidence, de réflexion et de réfraction est fournie par la loi de Snell qui s'écrit :

$$\frac{\sin \theta_L^1}{c_L^1} = \frac{\sin \theta_S^1}{c_S^1} = \frac{\sin \theta_L^2}{c_L^2} = \frac{\sin \theta_S^2}{c_S^2}$$

avec :

c_L^1 et c_L^2 : célérité des ondes L dans les milieux 1 et 2

c_S^1 et c_S^2 : célérité des ondes S dans les milieux 1 et 2

θ_L^1 et θ_L^2 : angle d'incidence des ondes L dans les milieux 1 et 2

θ_S^1 et θ_S^2 : angle d'incidence des ondes S dans les milieux 1 et 2

Ces quatre ondes ne sont pas toujours produites simultanément, mais cela est théoriquement possible. Les amplitudes de ces différentes ondes peuvent se calculer en fonction de l'amplitude de l'onde incidente et de son angle d'incidence.

Dans le cas où il n'y a pas transformation d'ondes, la réfraction obéit à la loi habituelle :

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Dans le cas de l'incidence normale où il n'y a pas transformation d'ondes, l'amplitude A_r de l'onde réfléchie est liée simplement à l'amplitude A_o de l'onde incidente par la relation :

$$A_r = A_o \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$$

$R_1 = \rho_1 c_1$ et $R_2 = \rho_2 c_2$ étant les *impédances acoustiques* des milieux ① et ② ce qui donne pour les énergies W_r et W_o proportionnelles au carré de l'amplitude pour un même milieu :

$$W_r = W_o \left[\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \right]^2$$

Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs du coefficient de réflexion pour des matériaux courants.

	Aluminium	Cuivre	Acier	Verre	Quartz	Polystyrène	Plexiglas	Perspex	Alcool	Eau	Huile	Air
Aluminium	0	18	21	2	~0	50	47	24	72	72	74	100
Cuivre		0	~0	19	25	75	73	57	88	87	88	100
Acier			0	31	27	77	76	61	81	88	89	100
Verre				0	1	52	49	26	74	73	75	100
Quartz					0	46	43	20	70	69	71	100
Polystyrène						0	2	11	13	12	17	100
Plexiglas							0	8	16	15	18	100
Perspex								0	38	37	41	100
Alcool									0	~0	~0	100
Eau										0	~0	100
Huile											0	100
Air												0

Si le faisceau d'ultrasons rencontre un obstacle mince comme un film liquide de couplage entre deux solides ou un vide à l'intérieur d'un matériau, l'énergie réfléchie dépend de la dimension de l'obstacle par rapport à la longueur d'onde.

L'énergie réfléchie W_r est donnée par :

$$W_r = W_o \frac{\left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right)^2}{4 \cot^2 \frac{2\pi L}{\Lambda} + \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} \right)^2} \quad \left| \begin{array}{l} L : \text{épaisseur de l'obstacle} \\ \text{traversé} \\ \Lambda : \text{longueur d'onde dans le} \\ \text{milieu constituant l'obstacle} \end{array} \right.$$

Dans le cas où l'obstacle est très petit, c'est-à-dire en pratique quand $L < \Lambda/100$, la réflexion est nulle. Le faisceau n'est pas influencé par la présence de l'obstacle.

f - Absorption [3]

Durant le passage d'une onde ultrasonore à travers un milieu, il se produit une dissipation de l'énergie due à la viscosité ou aux effets d'amortissement. La conduction et la radiation de chaleur entre la zone raréfiée et la zone comprimée de l'onde semblent aussi jouer un rôle important.

Le coefficient d'amortissement α de l'intensité d'une onde plane peut être défini par :

$$I = I_o e^{-2\alpha x}$$

Les résultats expérimentaux ne sont pas toujours conformes aux calculs théoriques de ce coefficient α . Notons cependant que, d'après Stokes [4], la part attribuable à la viscosité est :

$$\alpha_1 = \frac{8\pi^2 f^2 \eta}{3c^3 \rho}$$

et que Kirchhoff [5] donne comme valeur de la perte par conduction de chaleur :

$$\alpha_2 = \frac{2\pi^2 f^2}{c^3 \rho} \cdot \frac{\gamma - 1}{c_p} K$$

$$\left| \begin{array}{l} \gamma : \text{rapport des chaleurs spécifiques} \\ c_p : \text{chaleur spécifique à pression constante} \\ K : \text{conductibilité thermique} \end{array} \right.$$

Chapitre IV

ANALOGIES POSSIBLES – CHOIX DU TYPE D'ONDES

1 - ANALOGIE THÉORIQUE EXACTE

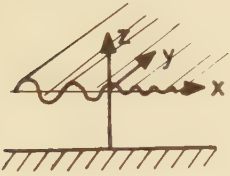
a - Houle

Nous avons vu au chapitre II que la houle irrotationnelle dépend d'un potentiel harmonique $\varphi(x, y, z, t)$ ($\Delta\varphi = 0$) et que en posant :

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, t) \operatorname{ch} k(z + d) \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{L}$$

le potentiel φ_1 qui caractérise la distribution en plan du potentiel est solution de :

$$\Delta\varphi_1 + k^2\varphi_1 = 0$$



avec, comme condition aux limites solides :

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0$$

b - Onde élastique

Cherchons l'équation qui régit le potentiel de vitesse φ d'une onde élastique *dans un liquide*. Définissons la condensation s par :

$$\rho = \rho_o(1 + s)$$

$$\left| \begin{array}{l} \rho : \text{masse spécifique en un point} \\ \rho_o : \text{masse spécifique au même point au repos} \end{array} \right.$$

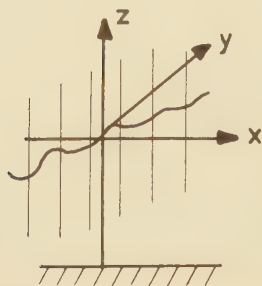
l'équation de continuité s'écrit alors :

$$\Delta\varphi - \frac{ds}{dt} = 0$$

Nous avons aussi l'équation dynamique

$$c^2 s = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

c étant la célérité des ondes élastiques en milieu liquide.



En éliminant s on trouve :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi$$

Dans le cas d'une onde harmonique simple et cylindrique d'axe parallèle à l'axe Oz , cette équation s'écrit :

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\Lambda}$$

Et, aux limites solides, la condition s'écrit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

c - Analogie

Les potentiels harmoniques des ondes de gravité et des ondes élastiques satisfont donc tous deux l'équation :

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ aux limites.}$$

La théorie des fonctions de ce type montre que le potentiel φ_p en un point quelconque du domaine d'application de l'équation est déterminé par les valeurs de φ et $\partial \varphi / \partial n$ aux limites d'après la relation :

$$\varphi_p = -\frac{1}{4} \int D(kr) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \frac{1}{4} \int \varphi \frac{\partial}{\partial n} D(kr) ds$$

avec

$$D(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-iy \cosh x} dx$$

La sommation est faite le long des limites, s étant l'abscisse curviligne et r la distance du point P à un élément ds .

Cette relation est valable à condition que k soit constant.

Si l'on considère deux domaines aux limites de même forme, mais de dimensions différentes, c'est-à-dire homothétiques, les directions de la normale ∂n en des points homologues seront les mêmes. Alors, aux limites solides, $\partial \varphi / \partial n$ sera nul pour les deux potentiels relatifs à ces deux domaines.

Si les deux valeurs de kr sont identiques en des points homologues et si les valeurs de φ et $\partial \varphi / \partial n$ se correspondent aux limites, les valeurs de φ_p seront les mêmes. La distribution de potentiel sera la même pour les deux domaines.

Pour cela, il faut et il suffit que r varie comme $1/k$, c'est-à-dire comme la longueur d'onde ; autrement dit que les dimensions linéaires des deux domaines soient dans un rapport égal au rapport des longueurs d'onde des deux potentiels.

On aura donc une analogie exacte entre les potentiels de la houle et d'ondes ultrasonores dans deux domaines homologues, à condition que l'échelle des longueurs soit égale à l'échelle des longueurs d'onde et que ces dernières soient constantes dans tout le domaine.

Cette dernière condition est réalisée par une onde sonore monochromatique et par une houle monochromatique en *profondeur constante*.

Cette analogie a été appliquée par A.M. Davis [6] [7] entre les rides capillaires, pour lesquelles elle demeure valable, et les ondes sonores. Le but était inverse du nôtre et consistait à visualiser, sur une cuve à rides, des phénomènes acoustiques en particulier ceux relatifs aux salles de spectacles.

d - Conclusion

Cette analogie permettrait donc de représenter très exactement les phénomènes de réflexion et de diffraction, mais elle ne permet pas de reproduire la réfraction de la houle en profondeur variable.

Nous avons donc tourné notre attention vers des ondes élastiques dont la célérité varie en fonction d'une troisième dimension analogue à la profondeur pour la houle. C'est pourquoi nous nous sommes intéressé aux ondes élastiques en milieu solide de dimension finie et en particulier aux ondes dans les plaques ou ondes de Lamb dont un type présente une célérité de phase décroissante avec l'épaisseur de la plaque, de même que la houle avec la profondeur. L'étude théorique de ces ondes fera l'objet du chapitre suivant, mais auparavant nous allons déterminer quelles sont les conditions à satisfaire pour représenter analogiquement les phénomènes de réfraction.

2 - ANALOGIE EMPIRIQUE

Au cours de l'étude théorique de la réfraction de la houle, nous avons vu que le rapport des amplitudes h_2 et h_1 en deux points voisins A et B était donné par :

$$\frac{h_2}{h_1} = k_1 k_2 \quad \text{avec} \quad k_1 = \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^{1/2} \quad k_2 = \left(\frac{C_{g1}}{C_{g2}} \right)^{1/2}$$

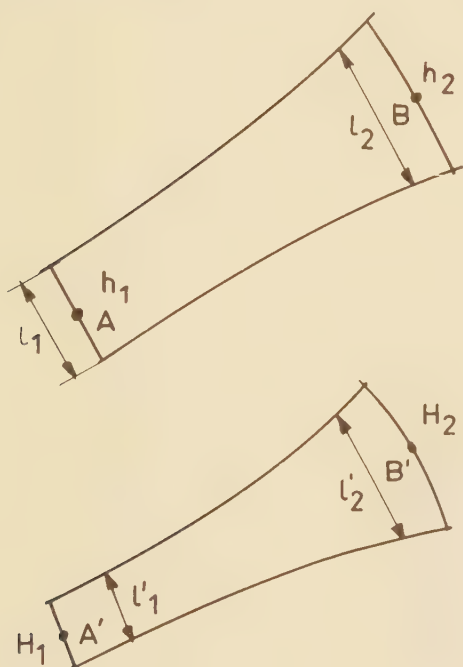
l_1 et l_2 étant les écartements en A et B de deux orthogonales voisines, C_{g1} et C_{g2} les célérités de groupe en A et B.

Donc, si A' et B' désignent deux points de la surface d'une plaque homologues de A et B, l'analogie de réfraction sera respectée si les amplitudes H_2 et H_1 de l'onde ultrasonore en A' et B' sont dans un rapport égal à celui des amplitudes h_2 et h_1 de la houle :

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{h_2}{h_1}$$

Si l'on suppose, comme pour la houle, que les ondes ultrasonores ne présentent pas de transfert d'énergie perpendiculaire à la direction de propagation et que l'énergie transmise par unité de largeur peut se mettre sous la forme :

$$E'_t = a c_g H^2$$



alors le rapport H_2/H_1 pourra également se dissocier en deux coefficients k'_1 et k'_2 :

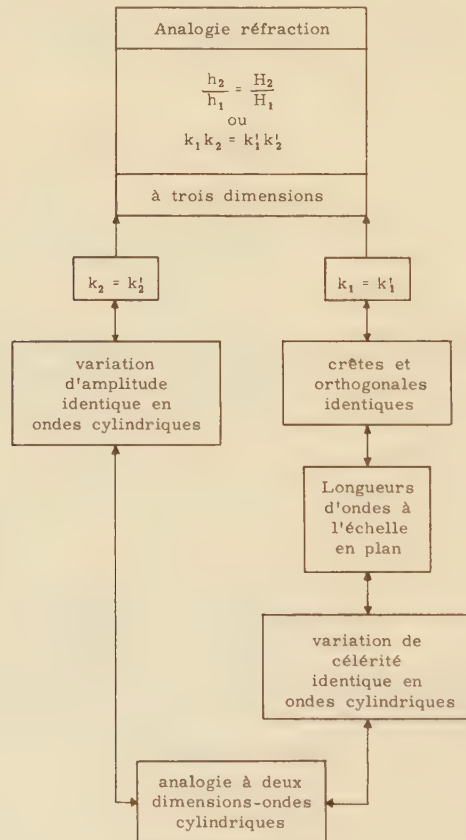
$$\frac{H_2}{H_1} = k'_1 k'_2 \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} k'_1 = \left(\frac{l'_2}{l'_1} \right)^{1/2} \\ k'_2 = \left(\frac{a_1 C_{g1}}{a_2 C_{g2}} \right) \end{array} \right.$$

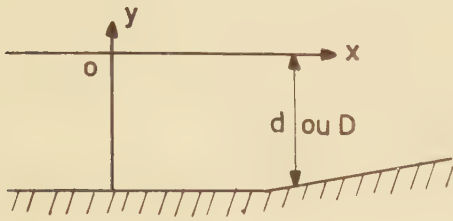
l'_1 et l'_2 étant les écartements en A' et B' de deux orthogonales voisines et $a_1 C_{g1}$, $a_2 C_{g2}$ les valeurs en A' et B' de a et C_g .

On retrouve alors la même distinction que pour la houle :

- k'_2 est lié à la variation d'amplitude due à la variation de célérité de groupe en l'absence de déformation des crêtes. Il peut donc être déterminé par la loi d'évolution d'amplitude d'une onde ultrasonore cylindrique se propageant parallèlement au gradient de célérité. Il sera donc le même pour la houle et les ultrasons si cette loi est la même que celle obtenue pour la houle (cf. chapitre II) ;
- k'_1 est lié à la déformation des crêtes et des orthogonales. Il sera donc identique si les crêtes et les orthogonales de la houle et des ultrasons sont identiques au facteur d'échelle en plan près. Pour cela, d'après la construction d'Huyghens, il faut et il suffit que le rapport des longueurs d'onde (c'est-à-dire des célérités pour des fréquences données) soit en tout point égal à l'échelle en plan ou, ce qui est équivalent, que, pour une onde ultrasonore cylindrique se propageant parallèlement à un gradient de célérité, la loi de variation de célérité de phase soit la même que pour la houle.

En résumé, ces conditions peuvent s'exprimer par le schéma suivant :





L'analogie de réfraction recherchée, qui est à trois dimensions, se ramène donc à une analogie à deux dimensions entre deux ondes cylindriques se propageant suivant l'axe Ox dans un milieu dont la dimension suivant Oy est variable. Cette dimension étant la profondeur pour la houle, l'épaisseur de la plaque pour une onde de Lamb. Les deux conditions à respecter pour l'analogie sont donc :

- Lois de variation de célérité relative, en fonction de la profondeur d et de l'épaisseur D , identiques.
- Lois de variation d'amplitude relative, en fonction de la profondeur d et de l'épaisseur D , identiques.

Chapitre V

ÉTUDE THÉORIQUE DES ONDES DE LAMB

PRINCIPALES NOTATIONS PROPRES AU CHAPITRE V

u, v, w : composantes des déplacements suivant Ox, Oy, Oz

σ_{ij} : composante suivant O_i de la contrainte sur une face perpendiculaire à O_j

λ et μ : coefficients de Lamé

$$h^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}$$

$$\alpha^2 = \xi^2 - h^2 = \xi^2 R_L^2$$

$$\beta^2 = \xi^2 - k^2 = \xi^2 R_s^2$$

$$k = \frac{c_R}{c_s}$$

$$a = \frac{c_s}{c_L}$$

E : densité d'énergie

E_s : densité d'énergie en surface

θ : dilatation

$\vec{\omega}$: rotation

$$\gamma = \alpha e$$

$$e = D/2$$

U, V : axes des ellipses trajectoires des particules

1 - ÉQUATIONS DU MOUVEMENT - DIFFÉRENTS TYPES D'ONDE EN MILIEU INFINI [8] [9]

a) Considérons un volume élémentaire $\partial x, \partial y, \partial z$ du milieu, dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées Ox, Oy, Oz . Six forces vont agir sur les six faces de ce solide, chacune étant définie par ses trois composantes suivant Ox, Oy, Oz .

La composante suivant Ox de la résultante a pour valeur :

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z - \sigma_{xx} \delta y \delta z + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z - \sigma_{xy} \delta x \delta z \\ & + \left(\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \delta z \right) \delta x \delta y - \sigma_{xz} \delta x \delta y = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

D'après la seconde loi de Newton, en négligeant les forces intérieures comme la pesanteur, elle est égale à :

$$(\rho \delta x \delta y \delta z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

En écrivant les équations identiques pour les composantes parallèles à Oy et Oz, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Ces équations sont valables quel que soit le milieu considéré. Pour les résoudre nous étudions le cas d'un milieu élastique isotrope pour lequel les équations de Hooke s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{xx} \quad , \quad \sigma_{yy} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{yy} \quad , \quad \sigma_{zz} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yz} &= \mu \varepsilon_{yz} \quad , \quad \sigma_{zx} = \mu \varepsilon_{zx} \quad , \quad \sigma_{xy} = \mu \varepsilon_{xy} \end{aligned} \right.$$

avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

et $\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ = changement de volume d'un cube unité, appelé dilatation.

En notant le Laplacien par Δ , on obtient le système :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w \end{aligned} \right. \quad (2)$$

En différenciant les deux membres de ces trois équations respectivement par rapport à x , y et z et en additionnant nous obtenons :

$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \theta \quad (3)$$

Cette équation de l'onde nous montre que la dilatation θ se propage dans le milieu considéré avec la célérité :

$$c_L = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}$$

Éliminons maintenant θ entre les deux premières équations du système (2) en différenciant les deux membres de ces équations respectivement par rapport à z et y et en soustrayant ; nous obtenons :

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

ce qui nous donne :

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial t^2} = \mu \Delta \bar{\omega}_x \quad (4)$$

On peut former deux équations semblables avec $\bar{\omega}_y$ et $\bar{\omega}_z$ en éliminant θ entre les autres équations du système (2).

$\bar{\omega}_x$, $\bar{\omega}_y$, $\bar{\omega}_z$ sont les composantes, suivant Ox , Oy , Oz , de la rotation ω , égales à :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\bar{\omega}_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ 2\bar{\omega}_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\bar{\omega}_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right.$$

La rotation $\bar{\omega}$ se propage donc avec la célérité :

$$c_s = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}$$

Si la dilatation θ est nulle, le système (2) devient :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \Delta u \quad (5)$$

et deux équations semblables en v et w .

La condition pour que les rotations $\bar{\omega}_x$, $\bar{\omega}_y$, $\bar{\omega}_z$ soient nulles, est que u , v et w satisfassent aux conditions :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \varphi \text{ fonction potentielle}$$

On a alors :

$$\theta = \Delta \varphi \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \Delta u$$

ce qui donne :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta u \quad (6)$$

et deux équations identiques en v et w .

Les équations (3), (4), (5) et (6) montrent donc qu'à l'intérieur d'un milieu élastique indéfini, les ondes élastiques peuvent se propager avec deux célérités différentes :

$$\alpha) \quad c_L = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}$$

pour les ondes ne comportant pas de rotation, que l'on doit donc appeler *irrotationnelles*.

$$\beta) \quad c_S = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}$$

pour les ondes ne comportant pas de dilatation, que l'on doit donc appeler *équivoluminales*.

Nous les appellerons plus simplement respectivement *ondes de dilatation* et *ondes de distorsion*.

b) Kolsky a montré, de la façon suivante, que n'importe quelle onde plane se propageant à travers un milieu élastique indéfini isotrope doit se déplacer avec l'une des deux célérités ci-dessus.

Considérons une onde plane se propageant parallèlement à Ox . Soit c sa célérité. Les déplacements u , v et w seront donc fonctions d'un seul paramètre $\psi = x - ct$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2} ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2} ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}$$

en posant

$$u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} ; \quad v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2} ; \quad w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}$$

et les dérivées par rapport à y et z étant toutes nulles, on obtient :

$$\begin{cases} \rho c^2 u'' = (\lambda + 2\mu) u'' \\ \rho c^2 v'' = \mu v'' \\ \rho c^2 w'' = \mu w'' \end{cases} \quad (7)$$

Les équations du système (7) ne peuvent être satisfaites que de deux façons :

$$c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{et} \quad v'' = w'' = 0$$

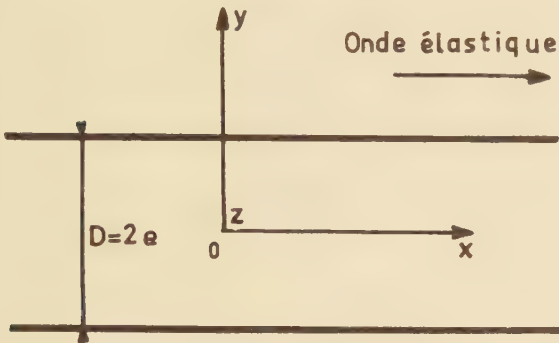
$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{et} \quad u'' = 0$$

Dans le premier cas, nous sommes en présence d'ondes longitudinales dans lesquelles le mouvement se fait parallèlement à la direction de propagation.

Dans le second, le mouvement est transversal (parallèle au front de l'onde).

Ces deux types d'ondes sont les plus courants et les plus utilisés notamment dans les techniques ultrasonores.

2 - ONDES ÉLASTIQUES DANS UNE PLAQUE - ONDES DE LAMB - ONDES DE RAYLEIGH [10] [11] [12] [13]



a - Généralités

Considérons une onde plane se déplaçant parallèlement à l'axe Ox dans une plaque d'épaisseur $D = 2e$, l'origine étant prise dans le plan médian.

Les déplacements des particules étant indépendants de z , on peut définir deux fonctions potentielles φ et ψ telles que :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La dilatation θ et la rotation $\bar{\omega}_z$ dans le plan xy s'écrivent alors :

$$\left| \begin{array}{l} \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \Delta \varphi \longrightarrow \varphi \text{ est associé à la dilatation} \\ \bar{\omega}_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \Delta \psi \longrightarrow \psi \text{ est associé à la rotation} \end{array} \right.$$

Les équations du mouvement (système (2) du paragraphe précédent) deviennent :

$$\left| \begin{array}{l} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \varphi) + \mu \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \psi) \\ \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \varphi) - \mu \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \psi) \end{array} \right.$$

Ces deux équations seront satisfaites si :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \Delta \varphi = c_L^2 \Delta \varphi \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \Delta \psi = c_S^2 \Delta \psi \end{array} \right.$$

Dans le cas d'une onde sinusoïdale de fréquence $f = \omega/2\pi$ nous avons :

$$\left| \begin{array}{l} \varphi(x, y, t) = e^{i\omega t} \varphi(x, y) \\ \psi(x, y, t) = e^{i\omega t} \psi(x, y) \end{array} \right.$$

d'où :

$$\Delta\varphi + h^2\varphi = 0 \quad \Delta\psi + k^2\psi = 0$$

En assurant une périodicité par rapport à x au moyen du facteur $e^{-i\xi x}$, la longueur d'onde étant $\Lambda = 2\pi/\xi$, nous obtenons :

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \alpha^2\varphi \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \beta^2\psi} \quad (8)$$

Les composantes des contraintes σ_{xx} , σ_{xy} , et σ_{yy} sont égales à :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_{xx} = \lambda\Delta\varphi + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda\Delta\varphi + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}\right) \\ \sigma_{xy} = \mu\epsilon_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) \\ \sigma_{yy} = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_{yy} = \lambda\Delta\varphi + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = \lambda\Delta\varphi + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \mu \left[(2\alpha^2 + \beta^2 - \xi^2)\varphi - 2i\xi\frac{\partial\psi}{\partial y} \right] \\ \sigma_{xy} = \mu \left[2i\xi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (\xi^2 + \beta^2)\psi \right] \\ \sigma_{yy} = \mu \left[(\xi^2 + \beta^2)\varphi + 2i\xi\frac{\partial\psi}{\partial y} \right] \end{cases}$$

La solution des équations (8) est :

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{2} [A e^{\alpha y} + C e^{-\alpha y}] e^{i(\omega t - \xi x)} \\ \psi = \frac{1}{2} [B e^{\beta y} + D e^{-\beta y}] e^{i(\omega t - \xi x)} \end{cases} \quad (9)$$

Cette solution dépend de quatre constantes A, B, C, D. Nous allons les déterminer grâce aux conditions aux limites imposées par les surfaces libres de la plaque, en écrivant que les contraintes σ_{xy} et σ_{yy} sont nulles pour $y = \pm e$.

Posons :

$$\begin{cases} m = i\xi\alpha e^{\alpha e} & m' = i\xi\alpha e^{-\alpha e} \\ n = \frac{\xi^2 + \beta^2}{2} e^{\alpha e} & n' = \frac{\xi^2 + \beta^2}{2} e^{-\alpha e} \\ p = \frac{\xi^2 + \beta^2}{2} e^{\beta e} & p' = \frac{\xi^2 + \beta^2}{2} e^{-\beta e} \\ q = i\xi\beta e^{\beta e} & q' = i\xi\beta e^{-\beta e} \end{cases}$$

En groupant les termes en A, B, C et D et en omettant le facteur $\mu e^{i(\omega t - \xi x)}$, ces conditions de contraintes nulles s'écrivent :

$$\text{Pour } y = e \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_{xy} = -mA + pB + m'C + p'D = 0 \\ \sigma_{yy} = nA + qB + n'C - q'D = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_{xy} = -mA + pB + m'C + p'D = 0 \\ \sigma_{yy} = nA + qB + n'C - q'D = 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\text{Pour } y = -e \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_{xy} = -m'A + p'B + mC + pD = 0 \\ \sigma_{yy} = n'A + q'B + nC - qD = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_{xy} = -m'A + p'B + mC + pD = 0 \\ \sigma_{yy} = n'A + q'B + nC - qD = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

Les quatre constantes A, B, C et D sont donc solutions du système formé par les quatre équations ci-dessus. On remarque qu'en additionnant et en soustrayant successivement les équations (10) et (12) et les équations (11) et (13), on trouve un système équivalent en prenant comme nouvelles inconnues les quantités F, F', G, G' définies par :

$$F = A + C \quad G = A - C$$

$$F' = B - D \quad G' = B + D$$

Ce système équivaut à pour déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m' - m) & (p - p') & 0 & 0 \\ (n + n') & (q + q') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(m + m') & (p + p') \\ 0 & 0 & (n - n') & (q - q') \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est le produit de deux déterminants Δ_1 et Δ_2 qui sont :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (m' - m) & (p - p') \\ (n + n') & (q + q') \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -(m + m') & (p + p') \\ (n - n') & (q - q') \end{vmatrix}$$

Pour que le système admette une solution non nulle, il faut que l'un au moins de ces déterminants soit nul ; or ils ne peuvent pas être simultanément nuls, puisqu'ils se déduisent l'un de l'autre en changeant le signe des quantités en prime (m' , n' , p' , q'), excepté, comme nous le verrons ci-après, si ces quantités sont nulles.

Dans le cas général, le système a donc deux solutions qui correspondent à deux types d'ondes différents. Nous les examinons ci-après.

$\alpha)$ Premier type d'ondes - Ondes symétriques

Il correspond à $\Delta_1 = 0$ et $\Delta_2 \neq 0$.

Ces conditions entraînent :

$$F \text{ et } F' \neq 0 \quad G = G' = 0 \quad \text{donc} \quad C = A \quad \text{et} \quad D = -B$$

Les fonctions φ et ψ sont alors égales à :

$$\left| \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} A(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) e^{i(\omega t - \xi x)} \\ \psi = \frac{1}{2} B(e^{\beta y} - e^{-\beta y}) e^{i(\omega t - \xi x)} \end{array} \right. \quad (14)$$

Les déplacements u et v sont donnés par :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} [-Ai\xi(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) + B\beta(e^{\beta y} + e^{-\beta y})] e^{i(\omega t - \xi x)} \\ v = \frac{1}{2} [A\alpha(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) + Bi\xi(e^{\beta y} - e^{-\beta y})] e^{i(\omega t - \xi x)} \end{cases} \quad (15)$$

Si l'on change y en $-y$, on voit que :

$$\begin{cases} u(-y) = u(y) \\ v(-y) = -v(y) \end{cases}$$

Le mouvement est donc symétrique par rapport à l'axe Ox . C'est pourquoi ce premier type d'ondes est appelé *ondes symétriques*.

L'équation de ces ondes est :

$$\Delta_1 = 0 \quad \text{soit} \quad (m - m') (q + q') + (p - p') (n + n') = 0 \quad (16)$$

β) Deuxième type d'ondes - Ondes asymétriques

Il correspond à $\Delta_2 = 0$ et $\Delta_1 \neq 0$, soit :

$$F = F' = 0 \quad G \quad \text{et} \quad G' \neq 0$$

donc :

$$C = -A \quad \text{et} \quad D = B$$

Les fonctions φ et ψ sont alors égales à :

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{2} A(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) e^{i(\omega t - \xi x)} \\ \psi = \frac{1}{2} B(e^{\beta y} + e^{-\beta y}) e^{i(\omega t - \xi x)} \end{cases} \quad (17)$$

et les déplacements à :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} [-Ai\xi(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) + B\beta(e^{\beta y} - e^{-\beta y})] e^{i(\omega t - \xi x)} \\ v = \frac{1}{2} [A\alpha(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) + Bi\xi(e^{\beta y} - e^{-\beta y})] e^{i(\omega t - \xi x)} \end{cases} \quad (18)$$

Si l'on change y en $-y$, on trouve :

$$\begin{cases} u(-y) = -u(y) \\ v(y) = -v(y) \end{cases}$$

Le mouvement est donc de directions opposées de part et d'autre de l'axe Ox . C'est pourquoi ce deuxième type d'ondes est appelé *ondes asymétriques*.

L'équation de ces ondes est :

$$\Delta_2 = 0, \text{ soit } (m + m') (q - q') + (p - p') (n + n') = 0 \quad (19)$$

γ) Ondes de surface

Les deux types d'ondes ci-dessus sont les seuls qui peuvent exister dans une plaque.

En effet, si les deux déterminants Δ_1 et Δ_2 sont différents de zéro, les quatre variables F, F', G, G' sont obligatoirement nulles, ce qui entraîne $A = B = C = D = 0$. En particulier, les ondes longitudinales et transversales qui correspondent respectivement à des potentiels ϕ et φ nuls ne peuvent exister seules.

Lorsque l'épaisseur D de la plaque tend vers l'infini, dans certains cas (nous verrons plus loin lesquels) les quantités m', n', p', q' tendent toutes vers zéro. Les deux types d'ondes se réduisent alors à un seul que l'on appelle *ondes de surface* et dont l'équation est :

$$mq + np = 0 \quad (20)$$

b - Ondes symétriques

Les fonctions φ et ϕ s'écrivent :

$$\begin{cases} \varphi = A \operatorname{ch} \alpha y e^{i(\omega t - \xi x)} \\ \phi = B \operatorname{sh} \beta y e^{i(\omega t - \xi x)} \end{cases}$$

En remplaçant $m, n, p, q, m', n', p', q'$ par leurs valeurs, l'équation (16) s'écrit :

$$\frac{\operatorname{th} \beta e}{\operatorname{th} \alpha e} = \frac{4\xi^2 \alpha \beta}{(\xi^2 + \beta^2)^2} \quad (21)$$

Cette relation constitue l'équation des célérités, qui nous donne la célérité de l'onde en fonction de l'épaisseur de la plaque et de la fréquence, par l'intermédiaire des variables auxiliaires ξ, α et β .

Cette équation peut se résoudre simplement dans deux cas : celui où la longueur d'onde est grande devant l'épaisseur de la plaque et celui où cette même longueur d'onde est petite devant l'épaisseur de la plaque.

α) Ondes longues

Dans le type le plus important (comme nous le verrons plus loin il en existe d'autres) d'ondes longues, $\xi e, \alpha e, \beta e$ sont tous petits. On peut alors confondre αe et βe avec leurs tangentes hyperboliques et la forme limite de l'équation des célérités est :

$$(\xi^2 + \beta^2)^2 - 4\xi^2 \alpha^2 = 0$$

soit : (22)

$$\frac{k^2}{\xi^2} = 4 \left(1 - \frac{h^2}{k^2} \right) = 4 \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right)$$

Ces ondes se déplacent donc avec la célérité c :

$$c^2 = \frac{\omega^2}{\xi^2} = \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\mu}{\rho} = 4 \left(1 - \frac{c_s^2}{c_L^2}\right) c_s^2$$

Ceci est en accord avec la théorie simplifiée où l'épaisseur est considérée comme infiniment petite et l'influence de l'inertie latérale négligée.

β) Ondes de surface (Ondes de Rayleigh)

Pour des ondes qui sont courtes comparées à l'épaisseur $2e$, les quantités ξe , αe , βe sont grandes ; les tangentes hyperboliques tendent vers 1 et l'équation limite obtenue est :

$$(\xi^2 + \beta^2)^2 - 4 \xi^2 \alpha \beta = 0 \quad (23)$$

En élevant les deux membres de cette équation au carré après les avoir divisés par ξ^4 on obtient :

$$\left(2 - \frac{k^2}{\xi^2}\right)^4 = 16 \left(1 - \frac{h^2}{\xi^2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{\xi^2}\right)$$

Ce qui, compte tenu des relations :

$$\frac{\omega^2}{\xi^2} = c_R^2 \quad \frac{h^2}{\omega^2} = c_L^2 \quad \frac{k^2}{\omega^2} = c_s^2$$

nous donne :

$$\left(2 - \frac{c_R^2}{c_s^2}\right)^4 = 16 \left(1 - \frac{c_R^2}{c_L^2}\right) \left(1 - \frac{c_R^2}{c_s^2}\right)$$

En posant :

$$\frac{c_R}{c_s} = k \quad \text{et} \quad \frac{c_s}{c_L} = a$$

on trouve facilement :

$$k^6 - 8k^4 + (24 - 16a^2)k^2 + 16(a^2 - 1) = 0 \quad (24)$$

avec :

$$a^2 = \frac{c_s^2}{c_L^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}$$

L'équation (24), qui est du sixième degré, peut donc être résolue pour chaque valeur du coefficient de Poisson ν , donnant ainsi la valeur de la célérité des ondes considérées que l'on appelle *ondes de Rayleigh* d'après le nom du Lord qui a fait leur analyse mathématique, ou *ondes de surface* (nous verrons plus loin pourquoi).

Dans le cas particulier d'un milieu incompressible ($\lambda = \infty$, $h = 0$, $\alpha = \xi$), on trouve $k = 0,9554$ soit $c_R = 0,9554 c_s$, tandis qu'avec l'hypothèse de Poisson ($\lambda = \mu$), on trouve $k = 0,9194$, soit $c_R = 0,9194 c_s$.

γ) Cas général

Cherchons maintenant à résoudre l'équation (21) dans le cas général. Cette équation peut être considérée comme une équation donnant ω , quand ξ est donné, c'est-à-dire déterminant les périodes, donc les célérités de différents modes correspondant à une longueur

d'onde donnée ; mais il est difficile de la résoudre de cette façon ; il est plus facile de déterminer les valeurs de ξ correspondant à des valeurs données du rapport $m = \beta/\alpha$. Ceci est équivalent à trouver les longueurs d'onde, donc les fréquences, correspondant à une célérité donnée, tout ceci, évidemment, pour une épaisseur $2e$ de la plaque donnée.

En outre, on obtient une solution valable pour tous les milieux ayant un même coefficient de Poisson ν , en prenant comme inconnue non pas c , mais $c_* = c/c_s$.

La relation $\beta = m\alpha$ nous donne :

$$\xi^2 = \frac{k^2 - m^2 h^2}{1 - m^2} \quad \text{et} \quad c_*^2 = \frac{\omega^2}{\xi^2} \frac{\rho}{\mu} = \frac{k^2}{\xi^2} = \frac{1 - m^2}{1 - a^2 m^2}$$

La célérité c_* ne dépend donc que de m pour un milieu de coefficient de Poisson donné.

En posant en outre $\alpha e = \gamma$, on trouve :

$$\xi^2 = \frac{k^2 \alpha^2 - h^2 \beta^2}{k^2 - h^2} = \frac{\alpha^2 - a^2 \beta^2}{1 - a^2}$$

et l'équation (21) prend la forme :

$$\frac{\text{th} m \gamma}{\text{th} \gamma} = 4m \frac{(1 - a^2 m^2)(1 - a^2)}{(1 - 2a^2 m^2 + m^2)^2} \quad (25)$$

La relation entre γ et la longueur d'onde est alors donnée par :

$$\xi^2 e^2 = \frac{(1 - a^2 m^2) \gamma^2}{1 - a^2}$$

$\gamma 1)$ Pour simplifier, nous supposons d'abord que le milieu considéré est incompressible, de telle sorte que $\lambda = \infty$, $\nu = 0,50$, $h = 0$, $\alpha = \xi$.

On a alors $\beta = m\xi$ et $\xi e = \gamma$ et l'équation (21) devient :

$$\frac{\text{th} m \gamma}{\text{th} \gamma} = \frac{4m}{(1 + m^2)^2} \quad \text{et} \quad c_*^2 = 1 - m^2 \quad (26)$$

$\gamma 1.1)$ Lamb a montré que les valeurs réelles de m admissibles se situent entre 0 et 0,2956. La dernière de ces valeurs donne à la célérité c la valeur $c_R = 0,9554 c_s$ qui est celle des ondes de Rayleigh.

Les valeurs de γ correspondant à une série de valeurs de m comprises dans ces limites, ainsi que les valeurs de la célérité c_* et de $\Lambda/2e$, rapport de la longueur d'onde à l'épaisseur, sont données dans le tableau 1.

$\gamma 1.2)$ Toutes ces valeurs de m correspondent à des valeurs réelles de β , c'est-à-dire à $\xi < k$.

Dans le cas opposé ($\xi > k$), nous devons écrire :

$$\beta_1^2 = k^2 - \xi^2 \quad \varphi = A \cosh \alpha y e^{+i(\omega t - \xi x)} \quad \psi = B \sin \beta_1 y e^{+i(\omega t - \xi x)}$$

l'équation des célérités étant alors :

$$\frac{\text{tg} \beta_1 e}{\text{th} \alpha e} = \frac{4 \xi^2 \alpha \beta_1}{(\xi^2 - \beta_1^2)^2} \quad \alpha \text{ demeurant réel } (\lambda = \infty, h = 0)$$

Avec l'hypothèse d'incompressibilité, cela donne :

$$\xi_e = \gamma \quad \beta_1 = n\xi$$

$$\frac{\text{th } n\gamma}{\text{th } \gamma} = \frac{4n}{(1 - n^2)^2} \quad \text{et} \quad c_*^2 = 1 + n^2 \quad (27)$$

n croissant à partir de 0, si nous prenons toujours la plus petite racine de l'équation (27), nous obtenons une série de valeurs de ω continues avec les racines de (26) et tendant vers la valeur 0 pour $n = \sqrt{3}$. Pour cette dernière, on trouve $c = 2 c_g$ en accord avec la formule générale pour les ondes longues.

Les résultats numériques sont reproduits dans le tableau 1. Ils ont été utilisés avec ceux obtenus pour β réel, pour tracer la courbe pointillée de la figure 7.

Tableau 1

Célérité de phase des ondes de Lamb 1er mode symétrique
Coefficient de Poisson $\nu = 0,5$ ($\lambda = \infty$)

m	n	γ	$\frac{\Lambda}{D}$	(fD) _*	C _*
0,2956		∞	0,0	∞	0,9554
0,29		8,67	0,362	2,643	0,957
0,28		7,09	0,442	2,172	0,960
0,27		6,38	0,492	1,957	0,963
0,26		5,93	0,530	1,823	0,966
0,25		5,61	0,560	1,729	0,968
0,20		4,75	0,662	1,478	0,979
0,15		4,35	0,722	1,370	0,989
0,10		4,14	0,759	1,311	0,995
0,05		4,03	0,779	1,283	0,999
0,0	0,0	4,00	0,785	1,274	1,0
	0,1	3,879	0,811	1,240	1,005
	0,2	3,570	0,880	1,159	1,020
	0,3	3,218	0,976	1,070	1,044
	0,4	2,883	1,090	0,987	1,077
	0,5	2,587	1,214	0,921	1,118
	0,6	2,331	1,348	0,865	1,166
	0,7	2,108	1,490	0,819	1,221
	0,8	1,912	1,643	0,780	1,281
	0,9	1,732	1,814	0,741	1,345
	1,0	$\pi/2$	2,0	0,708	$\sqrt{2}$
	1,1	1,417	2,217	0,671	1,487
	1,2	1,269	2,476	0,631	1,562
	1,3	1,121	2,803	0,585	1,640
	1,4	0,967	3,25	0,530	1,721
	1,5	0,798	3,94	0,457	1,803
	1,6	0,594	5,29	0,356	1,887
	1,7	0,292	10,8	0,1825	1,972
	1,71	0,241	13,0	0,1525	1,981
	1,72	0,175	18,0	0,1105	1,989
	1,73	0,081	38,8	0,0514	1,998
	$\sqrt{3}$	0,0	∞	0	2,0

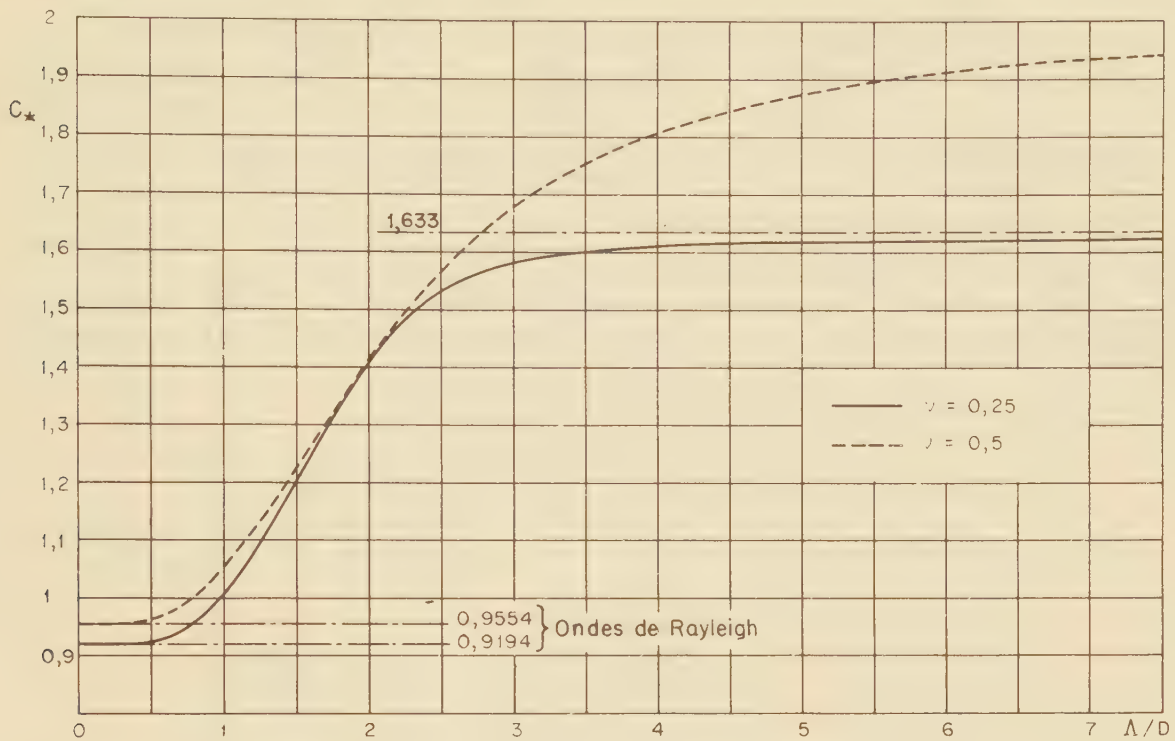


Figure 7 - Ondes de Lamb, 1er mode symétrique. Courbes de variation de la célérité de phase en fonction du rapport longueur d'onde/épaisseur.

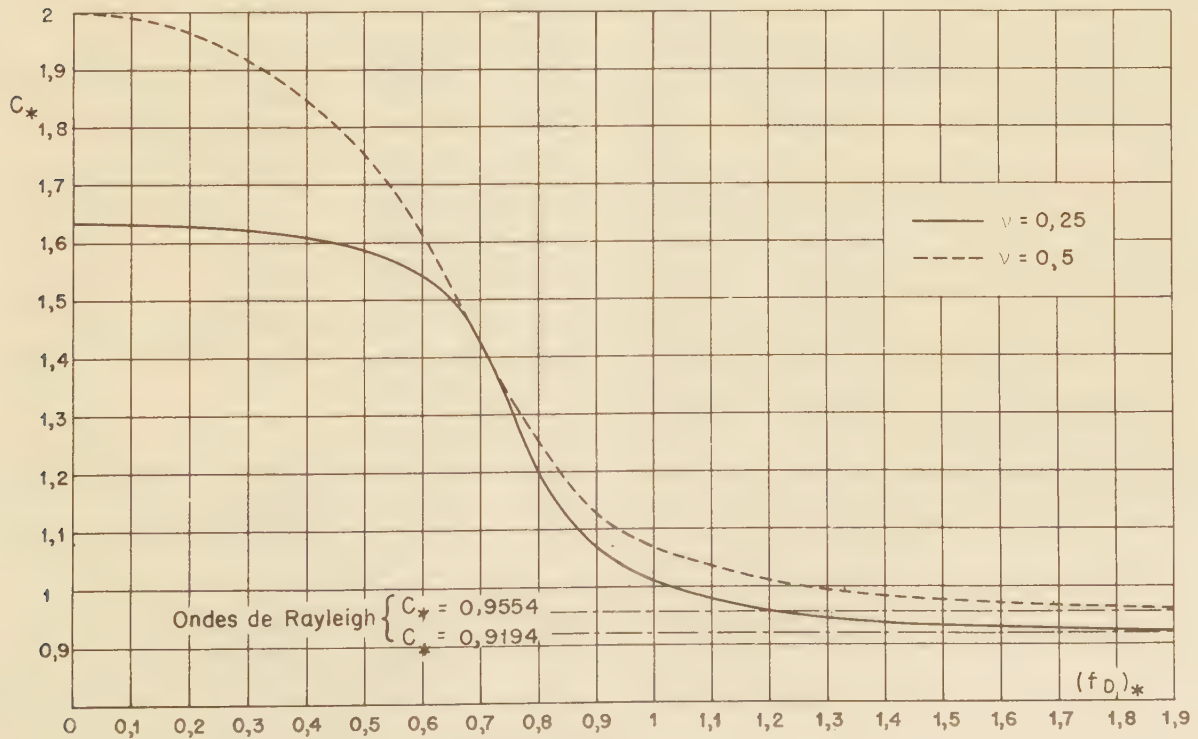


Figure 8 - Ondes de Lamb, 1er mode symétrique. Courbes de variation de la célérité de phase en fonction du produit fréquence.épaisseur.

$\gamma 1.3)$ Les valeurs de Λ , $2e = D$, c_* et f sont liées par la relation :

$$(fD)_* = \frac{c_*}{\Lambda/2e}$$

Des valeurs de c_* et $\Lambda/2e$, on peut donc déduire la valeur de $(fD)_*$. Cette valeur est reproduite dans le tableau 1 et sur la courbe de la figure 8.

$\gamma 1.4)$ Le 1er mode d'onde ainsi obtenu en utilisant la première racine de l'équation (27) est le plus intéressant du point de vue physique, mais il en existe une infinité d'autres qui correspondent aux racines d'ordre supérieur de l'équation (27) ; en effet, à chaque valeur de n correspond une infinité de valeurs de γ . Tous ces modes ont une célérité supérieure à c_s puisque nous sommes dans le cas $k > \xi$. On les appelle 2° et 3° etc., mode suivant l'ordre de la racine de (27).

Nous ne nous intéressons ici qu'au 1er mode.

Tableau 2

Célérité de phase des ondes de Lamb 1er mode symétrique
Coefficient de Poisson $\nu = 0,25$ ($\lambda = \mu$)

m	n	γ	$\frac{\Lambda}{D}$	$(fD)_*$	C_*
0,4641		∞	0,0	∞	0,9194
0,45		5,220	0,509	1,817	0,925
0,40		3,807	0,692	1,361	0,942
0,35		3,343	0,784	1,219	0,956
0,30		3,085	0,844	1,148	0,969
0,25		2,918	0,888	1,101	0,978
0,20		2,805	0,921	1,070	0,986
0,15		2,727	0,944	1,051	0,992
0,10		2,678	0,959	1,039	0,997
0,0	0,0	2,640	0,972	1,028	1,0
	0,1	2,604	0,983	1,020	1,003
	0,2	2,506	1,017	0,996	1,013
	0,4	2,214	1,129	0,930	1,049
	0,6	1,911	1,268	0,869	1,102
	0,8	1,649	1,412	0,824	1,163
	1,0	1,432	1,551	0,790	1,225
	1,2	1,253	1,683	0,763	1,284
	1,4	1,105	1,805	0,741	1,338
	1,6	0,979	1,924	0,721	1,386
	$\sqrt{3}$	0,907	2,0	0,707	$\sqrt{2}$
	1,8	0,872	2,04	0,700	1,428
	2,0	0,778	2,16	0,678	1,464
	2,2	0,696	2,28	0,656	1,495
	2,4	0,620	2,42	0,629	1,522
	2,6	0,551	2,58	0,598	1,544
	2,8	0,486	2,78	0,562	1,564
	3,0	0,422	3,04	0,520	1,581
	3,2	0,359	3,40	0,469	1,596
	3,4	0,292	3,99	0,403	1,609
	3,6	0,216	5,15	0,314	1,620
	3,8	0,109	9,8	0,166	1,630
	$\sqrt{15}$	0,0	∞	0	1,633

$\gamma 2)$ On peut effectuer un calcul analogue en prenant l'hypothèse de Poisson ($\lambda = \mu$, $\nu = 0,25$). Nous ne développerons ce calcul que pour le 1er mode asymétrique : nous nous sommes borné ici à reproduire les résultats obtenus par Lamb dans le tableau 2 et sur les figures 7 et 8 (courbe en trait plein).

$\gamma 3)$ Dans l'hypothèse d'incompressibilité, il existe une fonction de déplacement ψ_1 analogue à la fonction de courant en hydrodynamique

$$u = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi_1}{\partial x}$$

Les lignes $\psi_1 = \text{Cte}$ donnent les directions suivant lesquelles oscillent les particules et si elles sont tracées pour des valeurs équidistantes des constantes, leur plus ou moins grand degré de proximité indique les amplitudes relatives.

Les figures 9a et 9b reproduisent les courbes obtenues par Lamb respectivement dans les cas $\gamma = \infty$ (ondes de Rayleigh), $\gamma = 0,594$ ($\Lambda/2e = 5,29$).

b - Ondes asymétriques

Les fonctions φ et ψ s'écrivent :

$$\begin{cases} \varphi = A \operatorname{sh} \alpha y e^{i(\omega t - \xi x)} \\ \psi = B \operatorname{ch} \beta y e^{i(\omega t - \xi x)} \end{cases}$$

En remplaçant $m, n, p, q, m', n', p', q'$, par leurs valeurs, l'équation (19) s'écrit :

$$\boxed{\frac{\operatorname{th} \beta e}{\operatorname{th} \alpha e} = \frac{(\xi^2 + \beta^2)^2}{4\xi^2 \alpha \beta}} \quad (29)$$

Comme dans le cas des ondes symétriques, cette équation peut se résoudre simplement dans les deux cas suivants :

$\alpha)$ Ondes longues

$\alpha e, \beta e$, et ξe étant petits, on peut écrire :

$$\operatorname{th} \alpha e \sim \alpha e \left(1 - \frac{1}{3} \alpha^2 e^2 \right) \quad \operatorname{th} \beta e \sim \beta e \left(1 - \frac{1}{3} \beta^2 e^2 \right)$$

Nous trouvons ainsi l'équation limite :

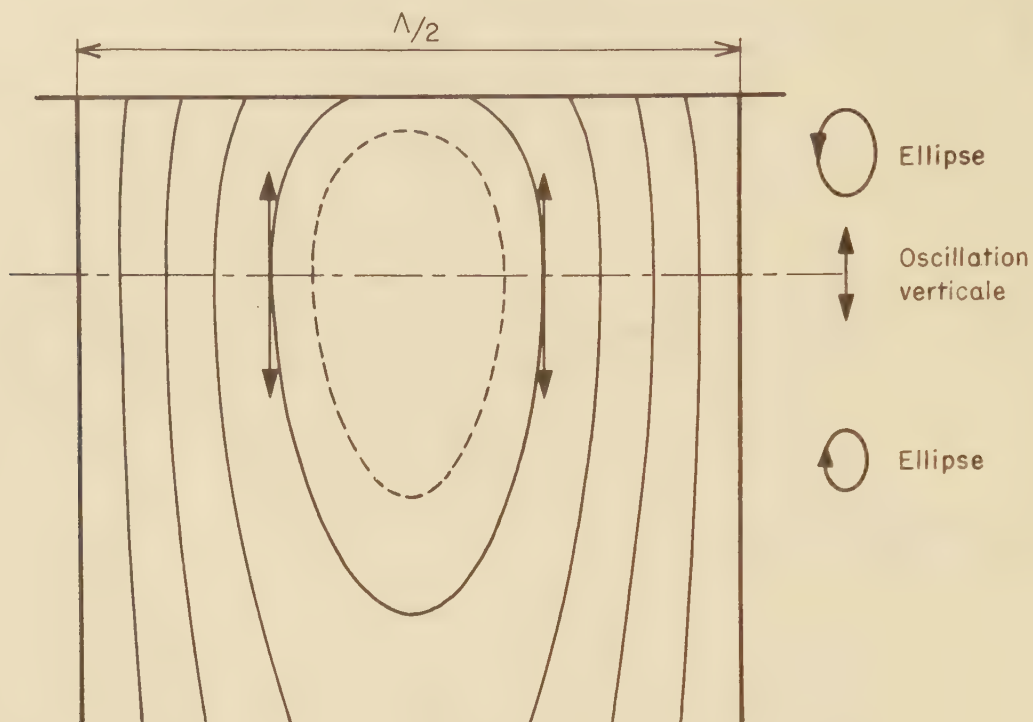
$$k^2 = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{h^2}{k^2} \right) \xi^4 e^2$$

en supposant que k^2/ξ^2 et h^2/ξ^2 sont petits.

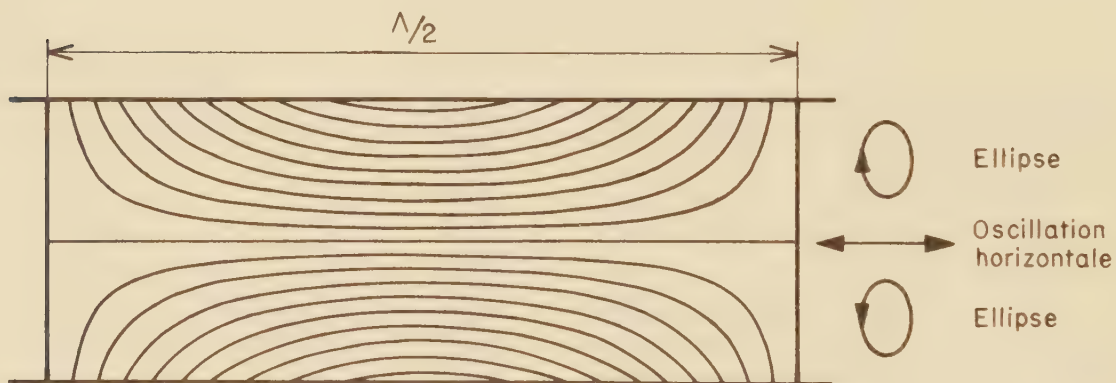
La célérité c correspondante est :

$$c^2 = \frac{4}{3} \xi^2 e^2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\mu}{\rho}$$

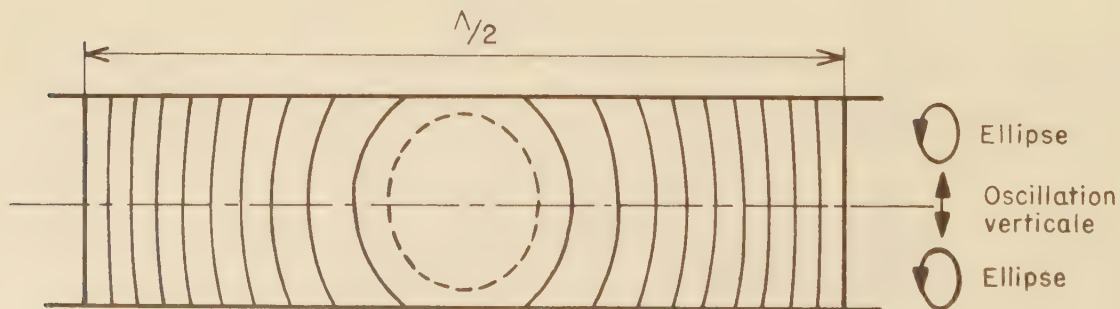
en accord avec la théorie élémentaire.



a. - Onde de Rayleigh



b - Onde de Lamb - 1er mode symétrique



c - Onde de Lamb - 1er mode asymétrique

β) Ondes courtes

Dans ce cas, l'équation (29) se réduit, comme dans le cas des ondes symétriques, à l'équation des ondes de Rayleigh (23).

γ) Cas général

Comme dans le cas des ondes symétriques, en posant $\beta = m \alpha$, $\alpha e = \gamma$, on a :

$$\xi^2 = \frac{k^2 \alpha^2 - h^2 \beta^2}{k^2 - h^2} = \frac{\alpha^2 - a^2 \beta^2}{1 - a^2} \quad \text{avec} \quad c_*^2 = \frac{1 - m^2}{1 - a^2 m^2}$$

l'équation (29) devient alors :

$$\frac{\text{th} m \gamma}{\text{th} \gamma} = \frac{[1 - 2a^2 m^2 + m^2]^2}{4m(1 - a^2 m^2)(1 - a^2)}$$

la relation entre γ et la longueur d'onde étant donnée par :

$$\xi^2 e^2 = \frac{(1 - a^2 m^2) \gamma^2}{1 - a^2}$$

γ1) En supposant comme précédemment que le milieu est incompressible ($\lambda = \infty$) ($\nu = 0,5$), on trouve :

$$\frac{\text{th} m \gamma}{\text{th} \gamma} = \frac{(1 + m^2)^2}{4m}$$

la célérité étant toujours $c_*^2 = (1 - m^2)$.

γ1.1) Les valeurs réelles de m admissibles se situent maintenant entre 0,2956 et 1. Les valeurs de γ correspondant à une série de valeurs de m comprises à l'intérieur de ces limites, ainsi que les valeurs correspondantes de $\Lambda/2e$, c_* et de $(fD)_*$, sont données dans le tableau 3.

Tableau 3

Célérité de phase des ondes de Lamb 1er mode asymétrique
Coefficient de Poisson $\nu = 0,5$ ($\lambda = \infty$)

m	γ	$\frac{\Lambda}{D}$	$(fD)_*$	C_*
0,2956	∞	0,0	∞	0,9554
0,30	8,84	0,356	2,680	0,954
0,35	4,20	0,748	1,253	0,937
0,40	3,028	1,038	0,883	0,917
0,45	2,379	1,321	0,676	0,893
0,50	1,946	1,614	0,537	0,866
0,55	1,627	1,931	0,432	0,835
0,60	1,377	2,282	0,350	0,800
0,65	1,171	2,683	0,283	0,760
0,70	0,995	3,157	0,226	0,714
0,75	0,841	3,736	0,177	0,661
0,80	0,700	4,45	0,135	0,600
0,85	0,563	5,58	0,0944	0,527
0,90	0,435	7,22	0,0604	0,436
0,92	0,381	8,246	0,0476	0,392
0,95	0,300	10,5	0,0297	0,312
0,97	0,210	14,9	0,0162	0,243
1,0	0,0	∞	0	0,0

Les courbes donnant la célérité en fonction de $\Lambda/2e$ et du produit $(fD)_*$ sont reproduites dans les figures 10 et 11 (courbe pointillée).

γ1.2) Dans le cas où $k > \xi$, les fonctions φ et ψ deviennent :

$$\varphi = A \operatorname{sh} \alpha y e^{i(\omega t - \xi x)} \quad \psi = B \cos \beta_1 y e^{i(\omega t - \xi x)}$$

l'équation des célérités étant :

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1 e}{\operatorname{th} \alpha e} = \frac{-(\xi^2 - \beta_1^2)^2}{4\xi^2 \alpha \beta_1} \quad \text{avec} \quad \beta_1^2 = k^2 - \xi^2$$

ce qui devient, dans l'hypothèse d'incompressibilité :

$$\frac{\operatorname{tg} n\gamma}{\operatorname{th} \gamma} = \frac{-(1 - n^2)^2}{4n} \quad \text{avec} \quad \beta_1^2 = k^2 - \xi^2, \quad \gamma = \xi e, \quad n = \frac{\beta_1}{\xi}$$

Nous ne poursuivrons pas l'étude des modes de vibration définis par cette équation, modes qui sont d'ailleurs analogues aux modes symétriques d'ordre supérieur à 1.

γ1.3) La figure 9c montre la forme des lignes $\psi_1 = \text{Cte}$ obtenues par Lamb dans le cas :

$$m = 0,9 \quad \gamma = 0,435 \quad m\gamma = 0,392 \quad \frac{\Lambda}{2e} = 7,22$$

δ) Nous effectuons maintenant le même calcul avec l'hypothèse de Poisson ($\lambda = \mu$) ($\nu = 0,25$) pour les valeurs réelles de m .

L'équation des célérités devient :

$$\frac{\operatorname{th} m\gamma}{\operatorname{th} \gamma} = \frac{(3 + m^2)^2}{8m(3 - m^2)} \quad (30)$$

avec :

$$\xi e = \sqrt{\frac{1}{2} (3 - m^2)} \gamma \quad c_*^2 = \frac{3(1 - m^2)}{3 - m^2} \quad \text{et} \quad (fD)_* = \frac{\gamma \sqrt{3(1 - m^2)}}{\pi \sqrt{2}}$$

Le second membre de l'équation (30) est égal à 1 si :

$$m^3 + 9m^2 + 15m - 9 = 0$$

qui a pour racine positive $m = 0,4641$.

Les valeurs réelles de m , doivent donc être comprises entre 1 et 0,4641. Pour cette dernière valeur de m , la célérité correspondante est :

$$c_* = 0,9194$$

en accord avec la théorie des ondes de Rayleigh. Les résultats numériques sont consignés dans le tableau 4 et les courbes sur les figures 10 et 11.

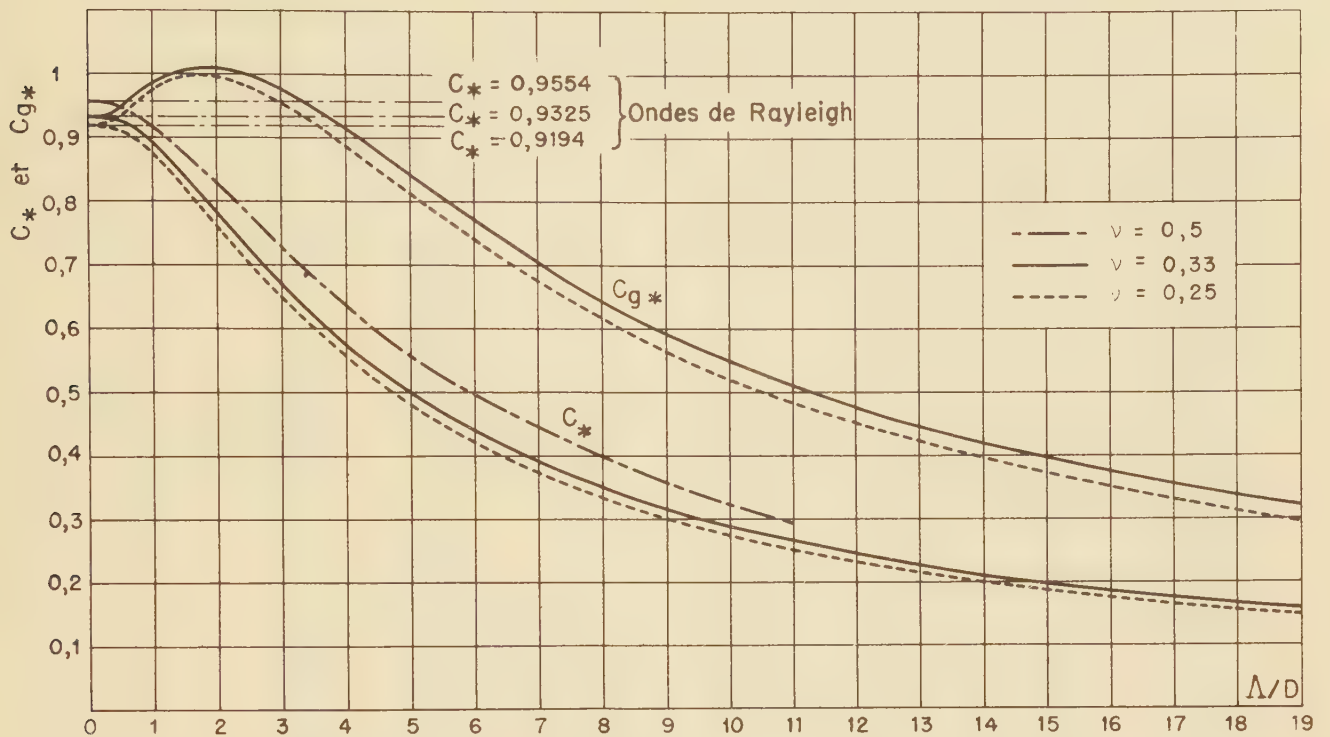


Figure 10 - Ondes de Lamb, 1er mode asymétrique. Courbes de variation des célérités de phase et de groupe en fonction du rapport longueur d'onde/épaisseur.

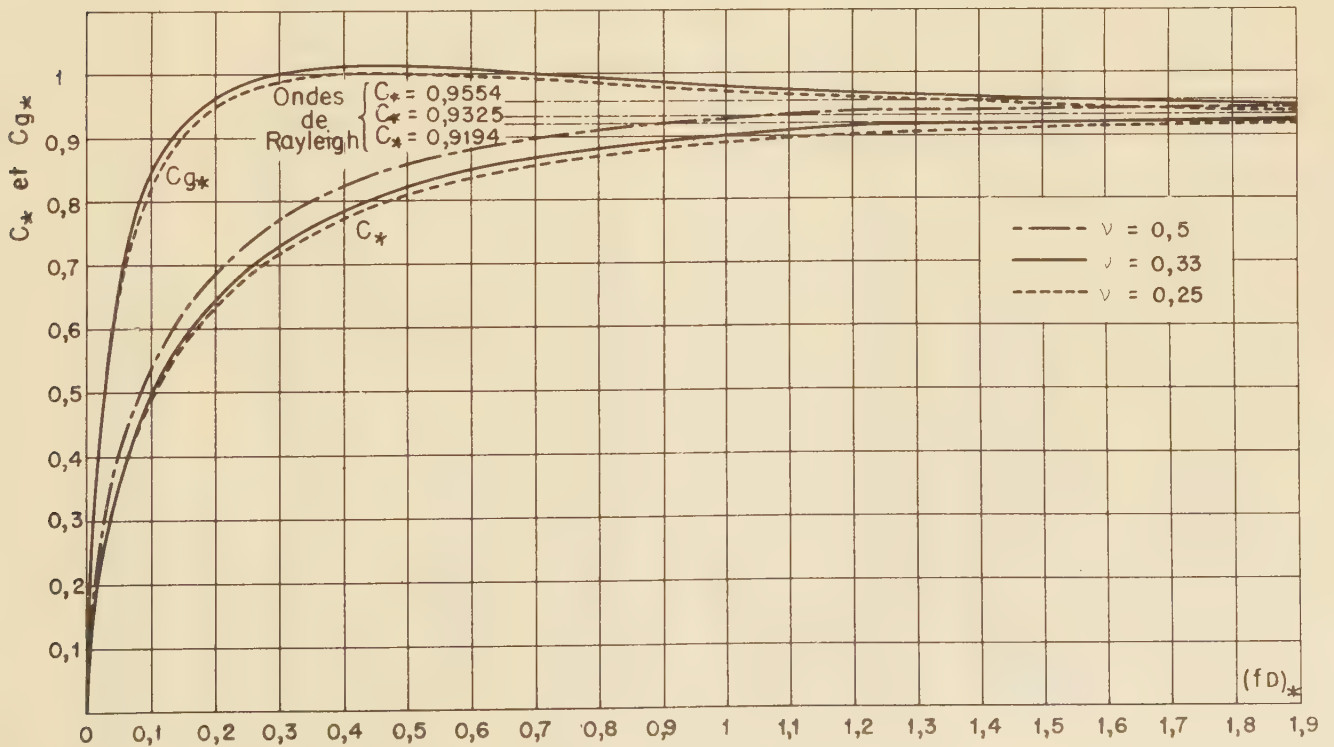


Figure 11 - Ondes de Lamb, 1er mode asymétrique. Courbes de variations des célérités de phase et de groupe en fonction du produit fréquence.épaisseur.

3 - ÉTUDE PARTICULIÈRE DU 1er MODE ASYMÉTRIQUE - ONDES DE FLEXION

Nous nous consacrons maintenant à l'étude du 1er mode asymétrique, en ce qui concerne la vitesse de phase, la vitesse de groupe, les trajectoires des particules et l'énergie.

Nous étudierons également la propagation de ces ondes dans une plaque d'épaisseur variable.

Dans tous les calculs numériques nous prendrons le coefficient de Poisson ν égal à 0,25 ou 0,33.

a - Célérité de phase

Comme nous l'avons déjà vu, la célérité de phase est obtenue en résolvant l'équation des célérités au moyen des variables auxiliaires m et γ . Nous avons effectué ce calcul au moyen d'un calculateur électronique CAB 500. Les résultats sont reproduits dans les tableaux 4 et 5 et sur les figures 10 et 11 qui donnent les courbes de variation de c_* en fonction de $(fD)_*$ et $\Lambda/2e$.

Tableau 4

Célérités de phase et de groupe des ondes de Lamb 1er mode asymétrique
Coefficient de Poisson $\nu = 0,25$ ($\lambda = \mu$)

m	γ	$\frac{\Lambda}{D}$	$(fD)_*$	C_*	C_{g*}
0,4641	∞	0	∞	0,9194	0,9194
0,470	5,9805	0,4456	2,0579	0,9171	0,9295
0,475	5,2830	0,5049	1,8124	0,9151	0,9352
0,480	4,8458	0,5509	1,6573	0,9130	0,9399
0,485	4,5245	0,5906	1,5425	0,9110	0,9439
0,490	4,2697	0,6264	1,4510	0,9088	0,9475
0,500	3,8767	0,6911	1,3089	0,9045	0,9538
0,525	3,2286	0,8337	1,0712	0,8931	0,9663
0,550	2,8002	0,9660	0,9117	0,8807	0,9760
0,575	2,4798	1,0966	0,7909	0,8673	0,9840
0,600	2,2238	1,2296	0,6936	0,8528	0,9904
0,625	2,0104	1,3681	0,6118	0,8370	0,9955
0,650	1,8272	1,5145	0,5413	0,8199	0,9990
0,675	1,6662	1,6717	0,4793	0,8012	1,0008
0,700	1,5220	1,8425	0,4237	0,7807	1,0007
0,725	1,3909	2,0306	0,3735	0,7584	0,9983
0,750	1,2700	2,2407	0,3275	0,7338	0,9931
0,775	1,1571	2,4789	0,2851	0,7066	0,9845
0,800	1,0501	2,7540	0,2456	0,6765	0,9715
0,825	0,9476	3,0785	0,2088	0,6427	0,9531
0,850	0,8479	3,4720	0,1741	0,6046	0,9275
0,875	0,7493	3,9666	0,1414	0,5610	0,8922
0,900	0,6498	4,6204	0,1104	0,5102	0,8435
0,910	0,6090	4,9499	0,0984	0,4873	0,8188
0,920	0,5675	5,3349	0,0867	0,4626	0,7905
0,930	0,5248	5,7943	0,0752	0,4357	0,7577
0,940	0,4802	6,3593	0,0639	0,4062	0,7190
0,950	0,4335	7,0759	0,0528	0,3734	0,6735
0,960	0,384	8,032	0,0419	0,3364	0,619
0,970	0,328	9,425	0,0311	0,2934	0,550
0,980	0,265	11,72	0,0206	0,2413	0,463
0,990	0,186	16,80	0,0102	0,1719	0,338
1	0	∞	0	0	0

Tableau 5

Célérités de phase et de groupe des ondes de Lamb 1er mode asymétrique
coefficient de Poisson $\nu = 0,33$

λ	γ	λ/D	$(\text{rd})_*$	c_*	c/c_0	c_{g*}	c_g/c_0
0,408	"	0	"	0,9325	1	0,9325	1
0,410	8,0706	0,3444	2,7056	0,9319	0,9993	0,9361	1,0038
0,420	5,6770	0,4902	1,8936	0,9282	0,9954	0,9471	1,0156
0,430	4,8609	0,5731	1,6130	0,9244	0,9913	0,9544	1,0234
0,440	4,3487	0,6413	1,4353	0,9206	0,9872	0,9602	1,0296
0,450	3,9737	0,7027	1,3043	0,9165	0,9828	0,9651	1,0350
0,460	3,6779	0,7601	1,2003	0,9124	0,9784	0,9695	1,0397
0,470	3,4338	0,8152	1,1140	0,9081	0,9738	0,9736	1,0440
0,480	3,2264	0,8687	1,0403	0,9037	0,9691	0,9773	1,0480
0,490	3,0462	0,9212	0,9760	0,8991	0,9642	0,9807	1,0517
0,500	2,8873	0,9732	0,9190	0,8944	0,9591	0,9840	1,0552
0,520	2,6168	1,0767	0,8216	0,8846	0,9486	0,9900	1,0616
0,540	2,3926	1,1810	0,7402	0,8741	0,9374	0,9953	1,0673
0,560	2,2015	1,2873	0,6704	0,8630	0,9255	0,9999	1,0723
0,580	2,0352	1,3969	0,6094	0,8512	0,9128	1,0039	1,0765
0,600	1,8880	1,5106	0,552	0,8386	0,8993	1,0071	1,0800
0,620	1,7561	1,6296	0,5064	0,8253	0,8850	1,0095	1,0826
0,640	1,6364	1,7549	0,4621	0,8110	0,8697	1,0110	1,0842
0,660	1,5267	1,8878	0,4216	0,7958	0,8534	1,0115	1,0847
0,680	1,4253	2,0297	0,3841	0,7797	0,8361	1,0107	1,0839
0,700	1,3309	2,1823	0,3493	0,7624	0,8175	1,0086	1,0816
0,710	1,2859	2,2632	0,3328	0,7533	0,8078	1,0069	1,0798
0,720	1,2422	2,3475	0,3169	0,7438	0,7977	1,0049	1,0776
0,730	1,1998	2,4357	0,3014	0,7341	0,7872	1,0023	1,0748
0,740	1,1585	2,5280	0,2864	0,7240	0,7764	0,9993	1,0716
0,750	1,1181	2,6248	0,2718	0,7135	0,7651	0,9957	1,0677
0,760	1,0787	2,7267	0,2577	0,7026	0,7535	0,9915	1,0632
0,770	1,0401	2,8342	0,2439	0,6913	0,7414	0,9867	1,0581
0,780	1,0023	2,9479	0,2305	0,6796	0,7288	0,9812	1,0522
0,790	0,9651	3,0686	0,2175	0,6674	0,7157	0,9749	1,0454
0,800	0,9285	3,1970	0,2048	0,6547	0,7020	0,9678	1,0378
0,810	0,8925	3,3342	0,1924	0,6414	0,6878	0,9597	1,0292
0,820	0,8568	3,4813	0,1803	0,6275	0,6729	0,9507	1,0194
0,830	0,8216	3,6398	0,1684	0,6130	0,6574	0,9405	1,0085
0,840	0,7866	3,8114	0,1569	0,5979	0,6411	0,9291	0,9963
0,850	0,7518	3,9982	0,1456	0,5820	0,6241	0,9162	0,9825
0,860	0,7171	4,2026	0,1345	0,5652	0,6061	0,9019	0,9672
0,870	0,6824	4,4282	0,1237	0,5476	0,5872	0,8858	0,9498
0,880	0,6475	4,6790	0,1130	0,5289	0,5672	0,8676	0,9304
0,890	0,6124	4,9607	0,1026	0,5092	0,5460	0,8471	0,9084
0,900	0,5770	5,2801	0,0924	0,4881	0,5234	0,8241	0,8837
0,905	0,5591	5,4572	0,0874	0,4770	0,5116	0,8114	0,8701
0,910	0,5410	5,6474	0,0824	0,4656	0,4993	0,7981	0,8558
0,915	0,5227	5,8537	0,0775	0,4537	0,4866	0,7836	0,8403
0,920	0,5041	6,0779	0,0726	0,4414	0,4733	0,7682	0,8238
0,925	0,4853	6,3233	0,0678	0,4286	0,4596	0,7516	0,8060
0,930	0,4662	6,5922	0,0630	0,4152	0,4452	0,7340	0,7871
0,935	0,4467	6,8902	0,0582	0,4012	0,4302	0,7150	0,7667
0,940	0,4268	7,2227	0,0535	0,3865	0,4145	0,6945	0,7447
0,945	0,4063	7,5974	0,0488	0,3711	0,3980	0,6723	0,7210
0,950	0,3854	8,0226	0,0442	0,3548	0,3805	0,6486	0,6956
0,955	0,3634	8,5203	0,0396	0,3376	0,3620	0,6217	0,6667
0,960	0,3408	9,1012	0,0351	0,3192	0,3423	0,5929	0,6358
0,965	0,3171	9,7968	0,0306	0,2994	0,3211	0,5612	0,6018
0,970	0,2920	10,6559	0,0261	0,2780	0,2981	0,5257	0,5637
0,975	0,2651	11,7538	0,0217	0,2545	0,2729	0,4856	0,5208
0,980	0,2358	13,2369	0,0172	0,2283	0,2448	0,4393	0,4711
0,985	0,2031	15,3899	0,0129	0,1983	0,2126	0,3851	0,4130
0,990	0,1650	18,9756	0,0086	0,1624	0,1741	0,3185	0,3415
0,995	0,1165	26,9153	0,0043	0,1151	0,1235	0,2303	0,2469

b - Célérité de groupe [13]

La célérité de phase des ondes de Lamb étant variable avec la fréquence et l'épaisseur de la plaque, il est nécessaire de recourir à la notion de vitesse de groupe qui est la vitesse avec laquelle se propage l'énergie.

On montre que cette vitesse de groupe est égale à la dérivée de la fréquence angulaire ω par rapport au nombre d'onde ξ ($\xi = 2\pi/\lambda$)

$$c_g = \frac{d\omega}{d\xi}$$

Comme :

$$\omega = c\xi$$

On a :

$$c_g = c + \xi \frac{dc}{d\xi}$$

or :

$$\frac{dc}{df} = \frac{dc}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{df}$$

donc :

$$\frac{dc}{d\xi} = \frac{-\frac{dc}{df}}{\frac{\xi}{c} \left(\frac{dc}{df} - \frac{c}{f} \right)} = \frac{-c f D \frac{dc}{d(fD)}}{\xi \left[f \frac{dc}{d(fD)} - c \right]}$$

d'où :

$$c_g = c - \frac{c f D \frac{dc}{d(fD)}}{f D \frac{dc}{d(fD)} - c} = \frac{c^2}{c - f D \frac{dc}{d(fD)}}$$

Soit, sous une forme adimensionnelle, en se rapportant à c_s :

$$\boxed{\frac{c_g}{c_s} = c_{g*} = \frac{c_s^2}{c_* - (fD)_* \frac{dc_*}{d(fD)_*}}} \quad (31)$$

La dérivée de c_* par rapport à $(fD)_*$ peut être calculée en dérivant par rapport à m l'équation des célérités et les relations donnant c_* et $(fD)_*$ en fonction de m .

Ces trois relations sont :

$$\left| \begin{aligned} c_* &= \frac{1 - m^2}{1 - a^2 m^2} = H(m) \\ (fD)_* &= \gamma \sqrt{\frac{(1 - m^2)}{\pi(1 - a^2)}} = \gamma F(m) \\ \frac{\text{th} m \gamma}{\text{th} \gamma} &= \frac{(1 - 2a^2 m^2 + m^2)^2}{4m(1 - a^2 m^2)(1 - a^2)} = G(m) \end{aligned} \right.$$

et le système obtenu en les dérivant s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{aligned}
 \frac{dc_*}{d(fD)_*} &= \frac{dc_*}{dm} \cdot \frac{dm}{d(fD)_*} \\
 \frac{dc_*}{dm} &= \frac{dH(m)}{dm} \\
 \frac{d(fD)_*}{dm} &= \frac{d\gamma}{dm} F(m) + \gamma \frac{dF(m)}{dm} \\
 \frac{d\gamma}{dm} &= \frac{\frac{dG(m)}{dm} \operatorname{th} \gamma - \frac{\gamma}{\operatorname{ch}^2 m \gamma}}{\frac{m}{\operatorname{ch}^2 m \gamma} - \frac{F}{\operatorname{ch}^2 \gamma}}
 \end{aligned} \right. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Le système (32) permet donc, par l'intermédiaire de l'équation (31), de calculer c_{g*} .

Le résultat du calcul numérique effectué sur calculateur CAB 500 est reproduit dans les tableaux 4 et 5. Les courbes correspondantes donnant c_{g*} en fonction de $(fD)_*$ et $\Lambda/2e$ sont tracées sur les figures 10 et 11.

c - Trajectoires des particules

α) Les composantes u et v du déplacement sont données par :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

En fonction des quantités sans dimension R_s , R_L , θ_s , θ_L définies dans le tableau des notations, les fonctions φ et ψ deviennent :

$$\varphi = A \operatorname{sh} \frac{\omega R_L}{c} y e^{i(\omega t - \xi x)} \quad \psi = B \operatorname{ch} \frac{\omega R_s}{c} y e^{i(\omega t - \xi x)}$$

En outre, la condition $\sigma_{yy} = 0$ pour $y = D/2$ donne, comme relation entre A et B :

$$A = -B \frac{2iR_s \operatorname{sh} \theta_s}{(1 + R_s^2) \operatorname{sh} \theta_L}$$

On a alors :

$$\left| \begin{aligned}
 u &= \frac{B\omega}{c} \left[R_s \operatorname{sh} \theta_s \frac{2y}{D} - \frac{2R_s \operatorname{sh} \theta_s}{(1 + R_s^2) \operatorname{sh} \theta_L} \operatorname{sh} \theta_s \frac{2y}{D} \right] e^{i(\omega t - \xi x)} \\
 v &= -\frac{Bi\omega}{c} \left[\frac{2R_s R_L \operatorname{sh} \theta_s}{(1 + R_s^2) \operatorname{sh} \theta_L} \operatorname{ch} \theta_L \frac{2y}{D} - \operatorname{ch} \theta_s \frac{2y}{D} \right] e^{i(\omega t - \xi x)}
 \end{aligned} \right.$$

soit encore, en prenant la partie réelle de ces expressions, en posant $y_1 = 2y/D$ et en changeant à la fois le signe de u et de v :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 u &= \frac{B\omega}{c_s c_*} U \cos (\omega t - \xi x) \\
 v &= \frac{B\omega}{c_s c_*} V \sin (\omega t - \xi x)
 \end{aligned}
 }$$

avec :

$$\begin{cases} U = -R_s \operatorname{sh} \theta_s y_1 + \frac{2R_s \operatorname{sh} \theta_s}{(1 + R_s^2) \operatorname{sh} \theta_L} \operatorname{sh} \theta_L y_1 \\ V = \operatorname{ch} \theta_s y_1 - \frac{2R_s R_L \operatorname{sh} \theta_s}{(1 + R_s^2) \operatorname{sh} \theta_L} \operatorname{ch} \theta_L y_1 \end{cases} \quad (33)$$

Les trajectoires des particules sont donc des ellipses dont les axes sont proportionnels à U et V et parallèles à Ox et Oy.

Nous avons calculé U/V_s , V/V_s et V/U en fonction de y , pour 4 valeurs de $(fD)_*$, U_s et V_s étant les valeurs de U et V en surface ($y_1 = 1$). Les résultats sont consignés dans les tableaux 6 à 9 et sur les figures 12 et 13.

Tableaux 6 et 7

Ondes de Lamb ($\nu = 0,25$)

Axes U et V des ellipses, trajectoires des particules

$(fD)_* = 0,174$

$y_1 = \frac{2y}{D}$	U/V_s	V/V_s	U/V	V/U
1	0,602	1	0,602	1,662
0,9	0,516	1,016	0,507	1,971
0,8	0,438	1,030	0,426	2,348
0,7	0,368	1,040	0,354	2,824
0,6	0,305	1,049	0,291	3,442
0,5	0,246	1,055	0,233	4,287
0,4	0,192	1,060	0,181	5,525
0,3	0,141	1,063	0,133	7,544
0,2	0,093	1,066	0,087	11,51
0,1	0,046	1,067	0,043	23,26
0	0	1,068	0	∞

$(fD)_* = 0,541$

$y_1 = \frac{2y}{D}$	U/V_s	V/V_s	U/V	V/U
1	0,715	1	0,715	1,398
0,9	0,532	1,039	0,512	1,953
0,8	0,390	1,060	0,368	2,718
0,7	0,281	1,069	0,263	3,801
0,640	0,230	1,069	0,215	4,660
0,6	0,199	1,069	0,186	5,378
0,5	0,137	1,065	0,129	7,749
0,4	0,092	1,039	0,087	11,48
0,3	0,059	1,052	0,056	17,76
0,2	0,035	1,046	0,033	30,01
0,1	0,016	1,042	0,015	64,88
0	0	1,041	0	∞

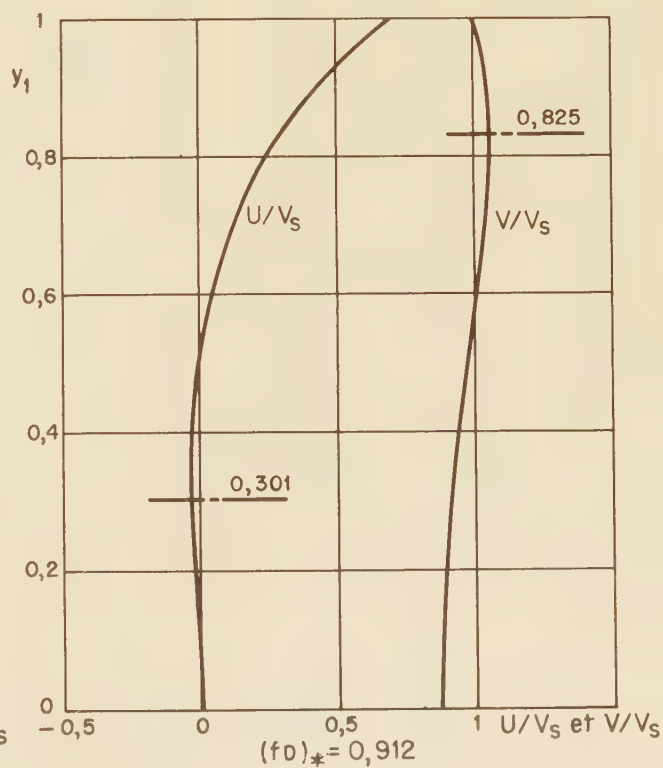
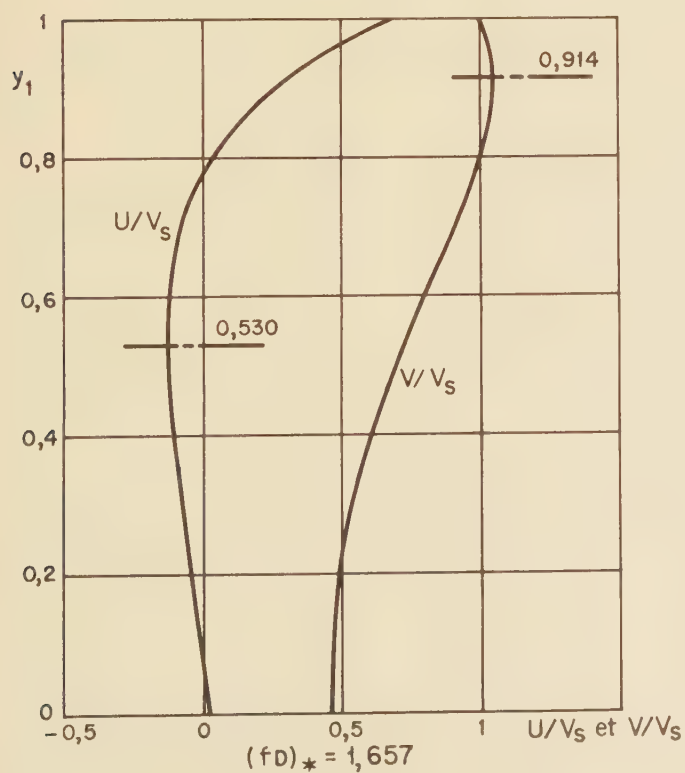
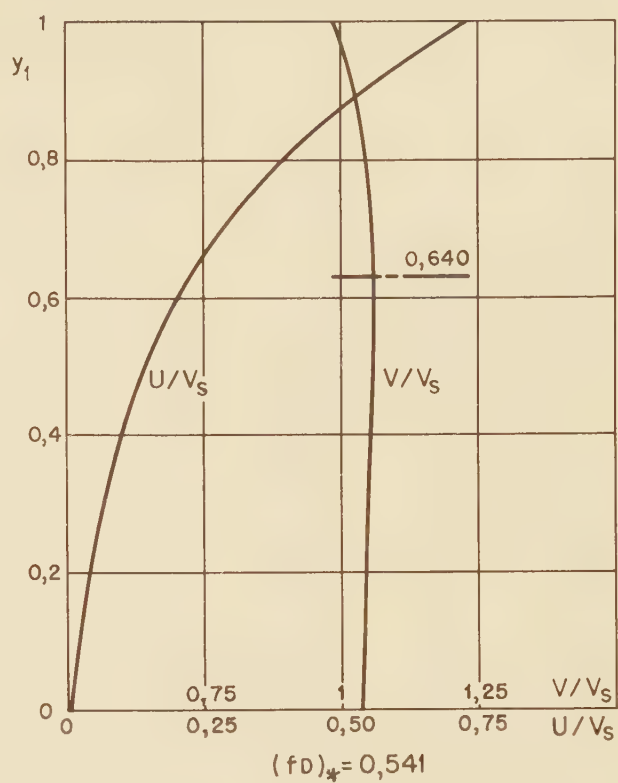
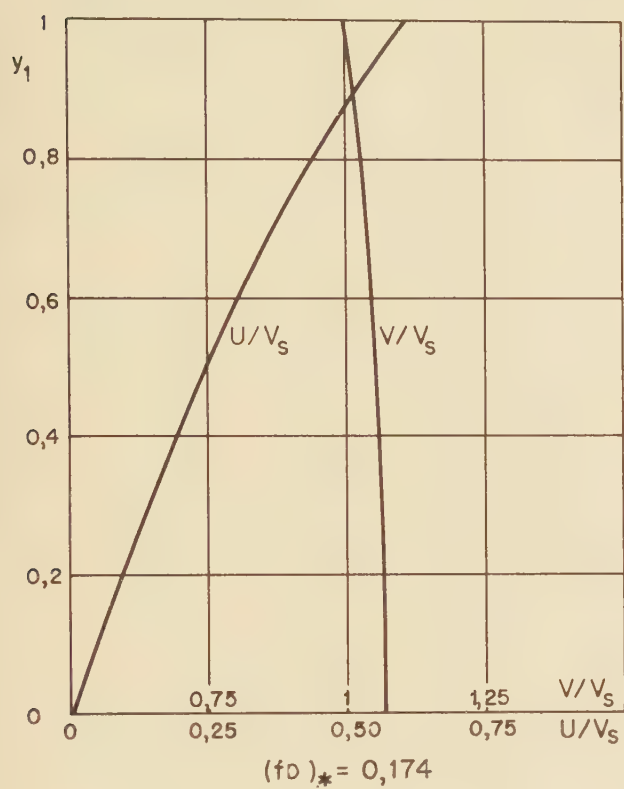
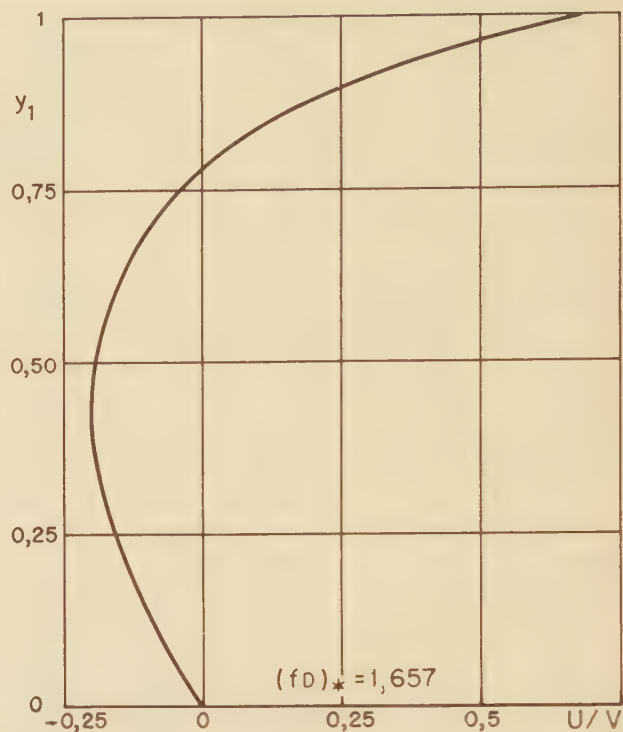
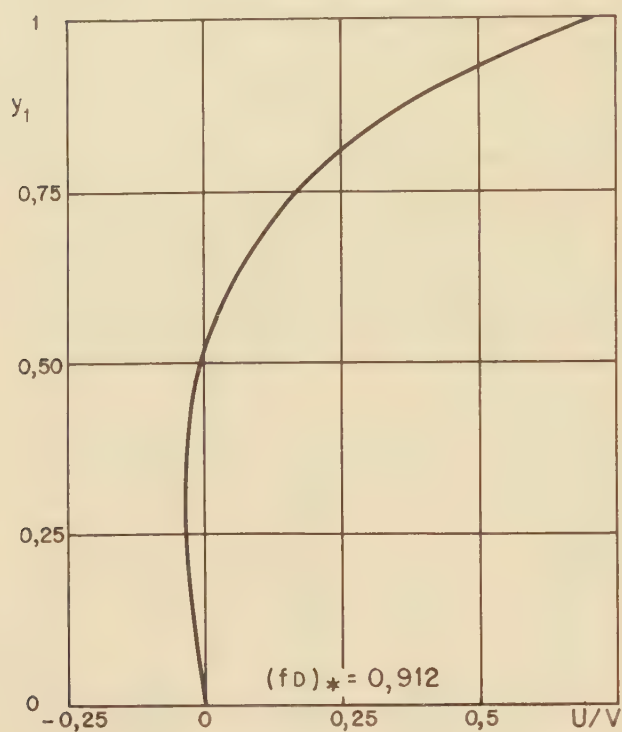


Figure 12 - Ondes de Lamb. 1er mode asymétrique ($\nu = 0,25$). Axes U et V des ellipses trajectoires des particules.



Ondes de Lamb. 1er mode asymétrique ($\nu = 0,25$). Rapport des axes U et V des ellipses trajectoires des particules

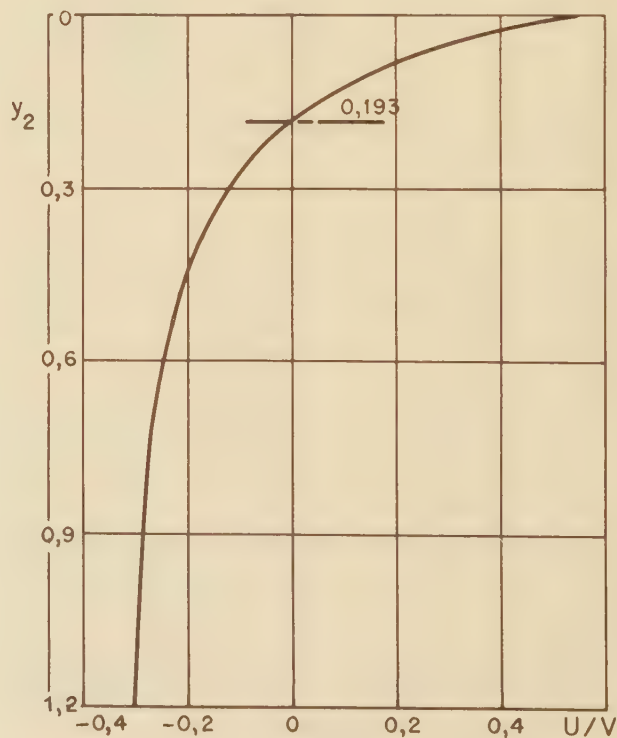
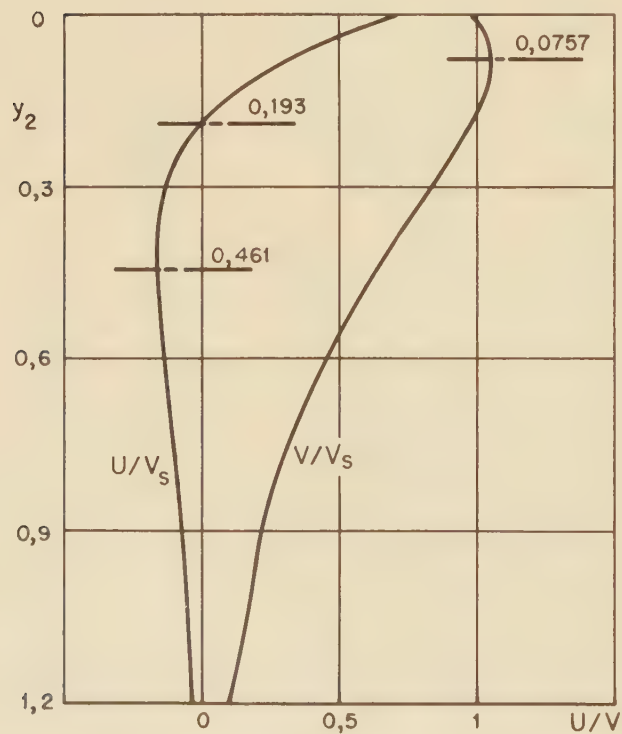


Figure 13 - Ondes de Rayleigh ($\nu = 0,25$). Axes U et V des ellipses trajectoires des particules. Rapport U/V .

Tableaux 8 et 9

Ondes de Lamb ($\nu = 0,25$)

Axes U et V des ellipses, trajectoires des particules

 $(fD)_* = 0,912$

$y_1 = \frac{2y}{D}$	U/V _s	V/V _s	U/V	V/U
1	0,706	1	0,706	1,417
0,9	0,433	1,049	0,413	2,422
0,825	0,288	1,060	0,271	3,688
0,8	0,246	1,057	0,233	4,291
0,7	0,122	1,040	0,118	8,500
0,6	0,044	1,010	0,044	22,99
0,5	- 0,002	0,975	- 0,002	562,1
0,4	- 0,024	0,939	- 0,026	- 38,95
0,301	- 0,030	0,910	- 0,034	- 29,60
0,3	- 0,030	0,909	- 0,033	- 29,99
0,2	- 0,026	0,885	- 0,029	- 34,50
0,1	- 0,014	0,871	- 0,017	- 60,47
0	0	0,866	0	∞

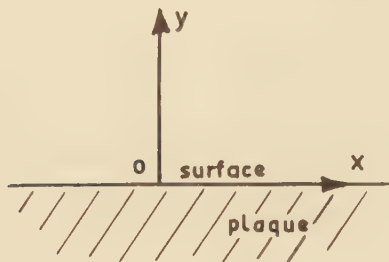
 $(fD)_* = 1,657$

$y_1 = \frac{2y}{D}$	U/V _s	V/V _s	U/V	V/U
1	0,686	1	0,686	1,457
0,914	0,300	1,053	0,285	3,517
0,9	0,257	1,050	0,245	4,078
0,8	0,030	0,998	0,030	32,88
0,7	- 0,080	0,901	- 0,088	- 11,33
0,6	- 0,123	0,793	- 0,155	- 6,466
0,530	- 0,130	0,721	- 0,180	- 5,540
0,5	- 0,129	0,690	- 0,186	- 5,369
0,4	- 0,115	0,602	- 0,191	- 5,249
0,3	- 0,091	0,532	- 0,171	- 5,862
0,2	- 0,062	0,482	- 0,129	- 7,762
0,1	- 0,031	0,452	- 0,069	- 14,40
0	0	0,442	0	∞

La quantité V/U caractérise l'aplatissement de l'ellipse. En outre, son signe donne le sens de rotation de la particule sur cette ellipse. En effet, pour une onde se déplaçant dans la direction des x positifs, nous avons :

$\frac{V}{U} > 0$ rotation dans le sens trigonométrique.

$\frac{V}{U} < 0$ rotation dans le sens des aiguilles d'une montre.



β) Dans le cas où l'épaisseur D devient infinie, c'est-à-dire pour les ondes de Rayleigh, les fonctions potentielles φ et ψ donnant un mouvement décroissant avec la profondeur [8] deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = A e^{\alpha y} e^{i(\omega t - \xi x)} = A e^{\frac{\omega R_L y}{c}} e^{i(\omega t - \xi x)} \\ \psi = B e^{\beta y} e^{i(\omega t - \xi x)} = B e^{\frac{\omega R_S y}{c}} e^{i(\omega t - \xi x)} \end{array} \right.$$

les axes Ox , Oy , ayant leur origine à la surface de la plaque et Oy étant dirigé vers l'extérieur de celle-ci.

La relation entre A et B donnée par $\sigma_{xy} = 0$ pour $y = 0$ devient :

$$A = B \frac{(1 + R_S^2)}{2iR_L}$$

Les composantes u et v du déplacement sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{B\omega}{c_s} \left[-\frac{c_s}{2c} \frac{1 + R_S^2}{2R_L} e^{\frac{\omega R_L y}{c}} + R_S \frac{c_s}{c} e^{\frac{\omega R_S y}{c}} \right] e^{i(\omega t - \xi x)} \\ v = \frac{iB\omega}{c_s} \left[-\frac{c_s}{2c} (1 + R_S^2) e^{\frac{\omega R_L y}{c}} + \frac{c_s}{c} e^{\frac{\omega R_S y}{c}} \right] e^{i(\omega t - \xi x)} \end{array} \right.$$

soit, en prenant la partie réelle, en posant $y_2 = y/\Lambda$ et en changeant les signes de u et v :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{B\omega}{c_s c_*} U \cos(\omega t - \xi x) \\ v = \frac{B\omega}{c_s c_*} V \sin(\omega t - \xi x) \end{array} \right.$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = R_S \left(\frac{2}{1 + R_S^2} e^{2\pi R_L y_2} - e^{2\pi R_S y_2} \right) \\ V = -\frac{(1 + R_S^2)}{2} e^{2\pi R_L y_2} + e^{2\pi R_S y_2} \end{array} \right. \quad (34)$$

Les trajectoires sont donc toujours des ellipses.

Nous avons calculé U/V_S , V/V_S et V/U en fonction de y_2 . Les résultats sont consignés dans le tableau 11 et sur la figure 13.

Comme précédemment, la valeur et le signe de V/U caractérisent l'aplatissement et le sens de parcours des ellipses, à savoir :

$$\begin{array}{ll} \frac{V}{U} > 0 & \text{sens trigonométrique} \\ \frac{V}{U} < 0 & \text{sens des aiguilles d'une montre} \end{array}$$

γ) Toutes les courbes ainsi tracées, donnant la variation de U et V en fonction de y_1 et y_2 , c'est-à-dire de la position (profondeur) à l'intérieur de la plaque, permettent de tirer les conclusions suivantes :

$\gamma 1$) Conclusions valables quel que soit $(fD)_*$:

Le mouvement étant asymétrique, on a évidemment : $U(-y) = -U(y)$ et $V(-y) = V(y)$. Dans tout ce qui suit, nous nous plaçons dans la demi-plaque $y > 0$.

Le rapport V/U de l'axe vertical à l'axe horizontal des ellipses est toujours supérieur à 1 en valeur absolue. Les ellipses ont donc leur grand axe vertical et perpendiculaire à la surface.

Ce rapport est toujours positif sur la face supérieure ($y > 0$) de la plaque dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des x positifs. Sur cette surface, les particules tournent donc dans le sens trigonométrique.

L'axe horizontal U des ellipses est toujours nul au centre de la plaque ($y = 0$), le mouvement y est donc purement vertical ; le sens de rotation des particules s'y inverse ; en effet, lorsque y change de signe, V/U change également de signe.

Cet axe horizontal est maximal en valeur absolue sur les faces de la plaque.

L'axe vertical V ne s'annule et ne change de signe pour aucune valeur de y . Il n'y a donc jamais un mouvement horizontal pur.

$\gamma 2$) Conclusions dépendant de la valeur de $(fD)_*$:

Pour les valeurs de $(fD)_*$ supérieures à une certaine valeur $(fD)_{*0}$, l'axe horizontal U s'annule pour une valeur de y différente de zéro. Il existe donc une profondeur à laquelle le mouvement est purement vertical. A cette profondeur, le sens de rotation des particules sur les ellipses s'inverse.

Entre les deux positions de déplacement purement vertical ($y = 0$ et $y = y_v$ non nul), la valeur absolue de U passe par un maximum pour une valeur de y qui tend vers zéro lorsque $(fD)_*$ tend vers $(fD)_{*0}$ par valeurs supérieures.

Pour les valeurs de $(fD)_*$ inférieures à $(fD)_{*0}$, l'axe horizontal ne s'annule plus pour une valeur de y différente de zéro. Sa variation en fonction de y est monotone.

Le sens de rotation des particules reste le même tant que y ne change pas de signe.

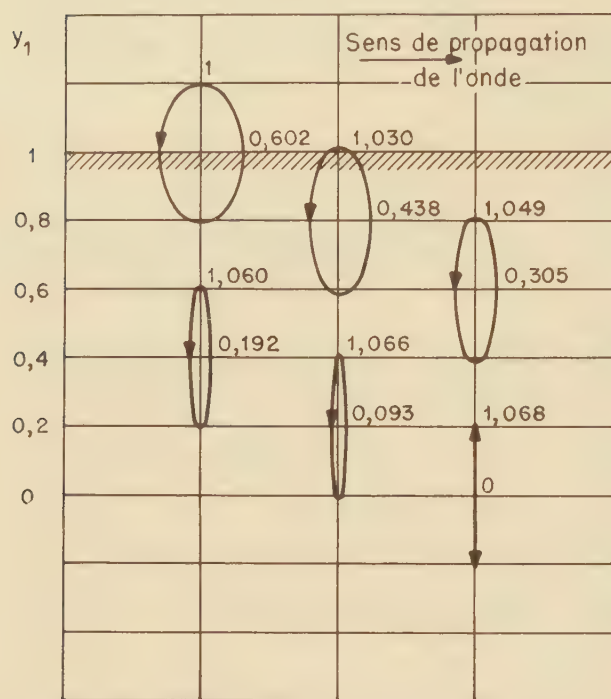
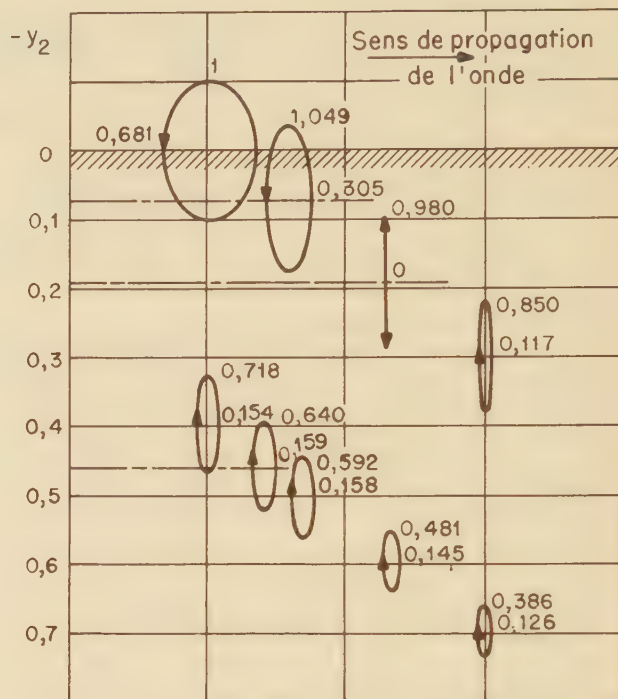
Pour les valeurs de $(fD)_*$ supérieures à une certaine valeur $(fD)_{*v}$, la valeur absolue de V passe par un maximum pour une valeur de y qui tend vers zéro lorsque $(fD)_*$ tend vers $(fD)_{*v}$ par valeurs supérieures.

Pour les valeurs de $(fD)_*$ inférieures à $(fD)_{*v}$, la variation de V est monotone et sa valeur absolue est maximale au centre de la plaque.

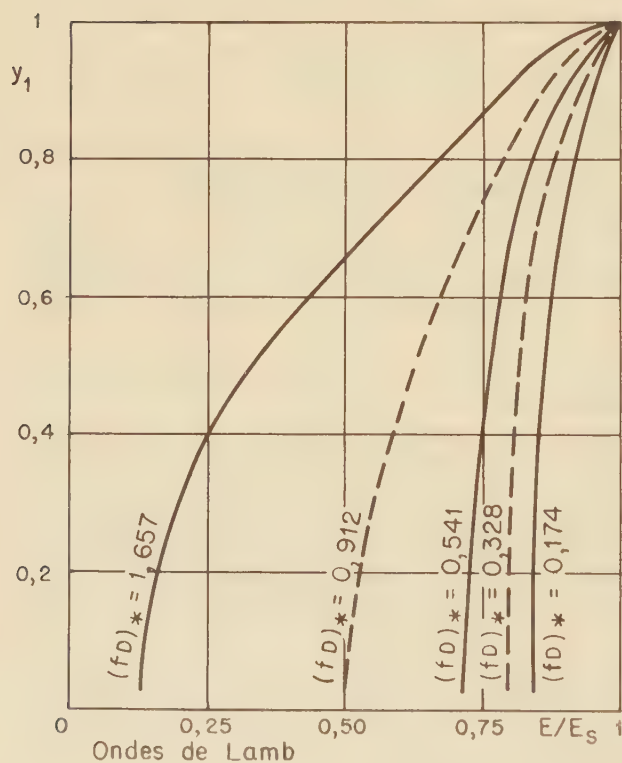
Les valeurs de $(fD)_{*0}$ et $(fD)_{*v}$ n'ont pas été calculées ; elles semblent se situer respectivement au voisinage de 0,4 et 0,8.

δ) Pour illustrer ces conclusions (figure 14) nous avons réalisé, pour deux valeurs différentes de $(fD)_*$, une figure montrant la forme des ellipses à différentes profondeurs dans la plaque. On y a indiqué la valeur des axes en prenant comme unité la valeur de l'axe vertical en surface.

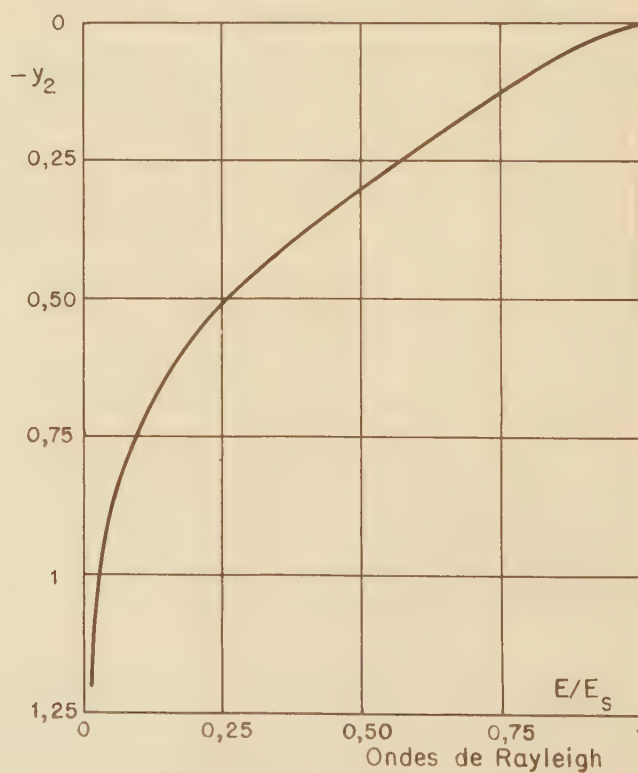
Enfin remarquons que, comme $V(y) = V(-y)$, les deux surfaces de la plaque se déplacent dans la même direction verticale au même instant. La distorsion se déplace donc le long de la plaque comme une ride (voir figure ci-après) ou encore on peut considérer cette onde comme une flexion de la plaque se propageant. C'est pourquoi on appelle souvent cette onde asymétrique *onde de flexion*.

Ondes de Lamb $(fd)_* = 0,174$ 

Ondes de Rayleigh

Forme des ellipses trajectoires des particules ($\nu = 0,25$).

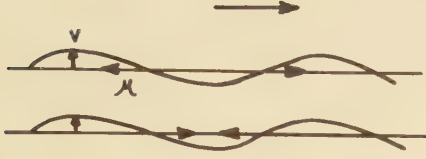
Ondes de Lamb



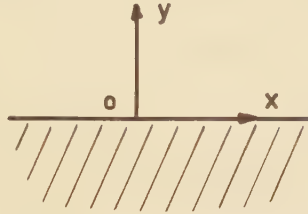
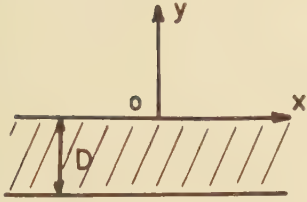
Ondes de Rayleigh

Figure 14 - Répartition de l'énergie en fonction de la profondeur ($\nu = 0,25$).

d - Equation générale des déplacements



Dans le paragraphe précédent les relations donnant les composantes u et v des déplacements étaient différentes pour les ondes de Lamb et les ondes de Rayleigh du fait que les origines d'axes choisies étaient différentes et que dans un cas l'ordonnée était rapportée à l'épaisseur D de la plaque et dans l'autre à la longueur d'onde Λ .



Nous déterminons ci-après une relation unique en prenant dans les deux cas une origine située sur la surface de la plaque et en rapportant l'ordonnée à la longueur d'onde Λ .

Nous appliquons donc aux relations (33) le changement de variable :

$$y_2 = \frac{y}{\Lambda}$$

$$y_1 = \frac{2\Lambda}{D} y_2 + 1 = \frac{2c}{fD} y_2 + 1$$

Et nous trouvons, en remplaçant les fonctions hyperboliques par des exponentielles :

$$\begin{cases} u = H_1 U \cos(\omega t - \xi x) \\ v = H_1 V \sin(\omega t - \xi x) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} U = R_s \left[\frac{2(1 - e^{-2\theta_s})}{(1 + R_s^2)(1 - e^{-2\theta_L})} (e^{y_L} - e^{-(y_L + 2\theta_L)}) - (e^{y_s} - e^{-(y_s + 2\theta_s)}) \right] \\ V = \frac{-(1 + e^{-2\theta_s})(1 + R_s^2)}{2(1 + e^{-2\theta_L})} (e^{y_L} + e^{-(y_L + 2\theta_L)}) + (e^{y_s} + e^{-(y_s + 2\theta_s)}) \end{cases} \quad (35)$$

et :

$$\begin{cases} Y_s = 2\pi R_s y_2 \\ Y_L = 2\pi R_L y_2 \end{cases}$$

Lorsque $D \rightarrow \infty$, θ_L et $\theta_s \rightarrow \infty$

Alors :

$$e^{-2\theta_s}, e^{-2\theta_L}, e^{-(y_s + 2\theta_s)}, e^{-(y_L + 2\theta_L)} \rightarrow 0$$

et U et V deviennent, pour les ondes de Rayleigh :

$$\begin{cases} U = R_s \left(\frac{2}{1 + R_s^2} e^{y_L} - e^{y_s} \right) \\ V = -\frac{1 + R_s^2}{2} e^{y_L} + e^{y_s} \end{cases}$$

Relations identiques aux relations (34).

Sur la surface de la plaque ($y_2 = 0$), les relations (35) deviennent :

$$\begin{cases} U_s = R_s \frac{(1 - R_s^2)}{1 + R_s^2} (1 - e^{-2\theta_s}) \\ V_s = \frac{1 - R_s^2}{2} (1 + e^{-2\theta_s}) \end{cases}$$

En définissant une nouvelle constante H que nous appellerons amplitude de l'onde et égale à :

$$H = H_1 V_s = H_1 \frac{1 - R_s^2}{2} (1 + e^{-2\theta_s})$$

l'équation générale des déplacements des ondes de Lamb et de Rayleigh s'écrit :

$$\begin{aligned} u &= H U \cos(\omega t - \xi x) \\ V &= H V \sin(\omega t - \xi x) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} U &= \frac{2R_s}{(1 - R_s^2)(1 + e^{-2\theta_s})} \left[\frac{2(1 - e^{-2\theta_s})}{(1 + R_s^2)(1 - e^{-2\theta_L})} (e^{y_L} - e^{-(y_L + 2\theta_L)}) - e^{y_s} + e^{-(y_s + 2\theta_s)} \right] \\ V &= \frac{2}{(1 - R_s^2)(1 + e^{-2\theta_s})} \left[- \frac{(1 + e^{-2\theta_s})(1 + R_s^2)}{2(1 + e^{-2\theta_L})} (e^{y_L} + e^{-(y_L + 2\theta_L)}) + e^{y_s} + e^{-(y_s + 2\theta_s)} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

e - Equation en surface

Si l'on ne considère que les déplacements à la surface de la plaque, l'équation générale de ces déplacements s'écrit :

$$\begin{cases} u_s = H U_s \cos(\omega t - \xi x) \\ v_s = H V_s \sin(\omega t - \xi x) \end{cases}$$

avec :

$$U_s = \frac{2R_s}{1 + R_s^2} \tanh \theta_s$$

$$V_s = 1$$
(37)

f - Energie de l'onde [14] [15]

Les contraintes élastiques mises en jeu dans les ondes de Lamb peuvent être calculées à partir des déplacements u et v par la loi de Hooke. Les vitesses des particules, elles, peuvent être obtenues par une différenciation partielle des déplacements par rapport au temps.

L'énergie totale d'un élément de volume situé à une profondeur y donnée est égale à la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. Ces énergies potentielle et cinétique peuvent être réparties en composantes parallèles au grand et au petit axe des ellipses. Or, à une profondeur y déterminée, la somme des composantes de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est constante en fonction du temps ; lorsque l'énergie cinétique devient maximale, l'énergie potentielle devient nulle.

On peut donc exprimer l'énergie totale par la somme des composantes maximales, parallèles aux axes, de l'énergie cinétique.

Le flux d'énergie dans une section de la plaque, par unité de largeur du front de l'onde est donc :

$$E = \rho c_g \int_{-D}^0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\max}^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{\max}^2 \right] dy$$

$(\partial u / \partial t)_{\max}$ et $(\partial v / \partial t)_{\max}$ étant les composantes maximales de la vitesse des particules suivant les axes.

Pour un mouvement harmonique simple de période T, E devient :

$$E = 4\pi^2 \rho \frac{c_g}{T^2} \int_{-D}^0 [(u_m)^2 + (v_m)^2] dy$$

u_m et v_m étant les amplitudes des déplacements u et v.

Cette équation permet d'étudier la répartition de l'énergie en fonction de la profondeur y dans la plaque.

En effet, la densité d'énergie à chaque profondeur est :

$$E = \frac{4\pi^2 \rho}{T^2} (U_m^2 + V_m^2)$$

c'est-à-dire, en la rapportant à la densité d'énergie à la surface E_s :

$$\frac{E}{E_s} = \left[\left(\frac{U}{V_s} \right)^2 + \left(\frac{V}{V_s} \right)^2 \right] \frac{V_s^2}{U_s^2 + V_s^2}$$

Nous avons calculé cette distribution de E/E_s en fonction de y pour six valeurs de $(fD)_*$. Les résultats sont portés dans les tableaux 10 et 11 et sur la figure 14.

Tableau 10

Ondes de Lamb ($\nu = 0,25$)
Répartition de l'énergie en fonction de la profondeur

$(fD)_*$ $y_1 = \frac{2y}{D}$	1,657	0,912	0,541	0,328	0,174	
1	1	1	1	1	1	} E/E_s
0,9	0,795	0,860	0,901	0,929	0,954	
0,8	0,677	0,787	0,843	0,882	0,920	
0,7	0,556	0,733	0,807	0,851	0,894	
0,6	0,437	0,682	0,782	0,831	0,875	
0,5	0,335	0,634	0,763	0,817	0,862	
0,4	0,225	0,589	0,747	0,807	0,852	
0,3	0,198	0,552	0,734	0,801	0,845	
0,2	0,161	0,523	0,724	0,796	0,840	
0,1	0,140	0,506	0,718	0,794	0,838	
0	0,133	0,500	0,716	0,793	0,837	

Tableau 11

Ondes de Rayleigh ($\nu = 0,25$)

Axes U et V des ellipses et répartition de l'énergie en fonction de la profondeur

$y_2 = \frac{-Y}{\Lambda}$	U/V _s	V/V _s	U/V	V/U	E/E _s
0	0,681	1	0,681	1,47	1
0,0757	0,305	1,049	0,291	3,44	0,815
0,1	0,220	1,046	0,210	4,76	0,780
0,193	0	0,980	0	∞	0,656
0,2	- 0,012	0,972	- 0,0124	- 81,0	0,645
0,3	- 0,117	0,851	- 0,138	- 7,26	0,505
0,4	- 0,155	0,718	- 0,216	- 4,64	0,368
0,461	- 0,159	0,640	- 0,249	- 4,02	0,298
0,5	- 0,158	0,592	- 0,267	- 3,75	0,257
0,6	- 0,145	0,481	- 0,302	- 3,31	0,172
0,7	- 0,126	0,387	- 0,327	- 3,06	0,113
0,8	- 0,106	0,308	- 0,344	- 2,91	0,0729
0,9	- 0,0873	0,245	- 0,357	- 2,80	0,0462
1	- 0,0724	0,193	- 0,366	- 2,73	0,0288
1,1	- 0,0568	0,152	- 0,373	- 2,68	0,0178
1,2	- 0,0453	0,120	- 0,378	- 2,64	0,0113
1,4	- 0,0283	0,0736	- 0,385	- 2,60	0,0042
1,6	- 0,0175	0,0451	- 0,389	- 2,57	0,0016
$y \rightarrow + \infty$	0	0	0,393	- 2,54	0

g - Onde en épaisseur lentement variable - Evolution de l'amplitude de surface

Nous considérons maintenant un milieu d'épaisseur lentement variable le long de l'axe des x. En chaque point de cet axe, c'est-à-dire pour une épaisseur donnée, nous serons en présence d'une onde analogue à celle existant en milieu d'épaisseur constante identique, c'est-à-dire présentant les mêmes célérités de phase et de groupe et la même distribution d'amplitudes en fonction de la profondeur, cette onde se transformant lentement en fonction de l'épaisseur.

Chacune de ces ondes, *tangente* à une onde en épaisseur constante, est caractérisée par la constante H donnant l'amplitude en surface.

On peut déterminer la variation de cette constante en fonction de l'épaisseur D de la plaque par une méthode énergétique analogue à celle utilisée pour obtenir théoriquement l'évolution de l'amplitude de la houle en profondeur variable.

On écrit que l'énergie transmise en l'unité de temps, par unité de largeur du front à travers un plan perpendiculaire à Ox, est constante.

Comme le milieu semi-infini des ondes de Rayleigh ne correspond qu'à la moitié de la plaque dont l'épaisseur tend vers l'infini, nous avons :

$$E = 4\pi^2 \rho \frac{C_g}{T^2} \int_{-D/2}^0 [(u_m)^2 + (v_m)^2] dy = E_0 = \text{Cte}$$

E_0 étant l'énergie en épaisseur infinie, c'est-à-dire l'énergie des ondes de Rayleigh.

En prenant comme variable $y_2 = y/\Lambda$, cette équation s'écrit :

$$4\pi^2 \rho \frac{C_g \Lambda}{T^2} \int_{-D/2\Lambda}^0 (u_m^2 + v_m^2) dy_2 = 4\pi^2 \rho \frac{C_{g0} \Lambda_0}{T^2} \int_{-\infty}^0 (u_m^2 + v_m^2) dy_2$$

Soit, pour une période d'onde T et un milieu donnés :

$$c_g c \int_{-(\frac{fD}{2c})}^0 (u_m^2 + v_m^2) dy_2 = c_{g0} c_0 \int_{-\infty}^0 (u_m^2 + v_m^2) dy_2$$

Or nous avons :

$$\begin{cases} u_m = HU \\ v_m = HV \end{cases}$$

U et V étant donnés par les relations (36).

En prenant $H = 1$ en épaisseur infinie, il vient :

$$c_g c H^2 \int_{-(\frac{fD}{2c})}^0 (U^2 + V^2) dy_2 = c_{g0} c_0 \int_{-\infty}^0 (U^2 + V^2) dy_2$$

En posant :

$$W = c \int_{-(\frac{fD}{2c})}^0 (U^2 + V^2) dy_2 \quad \text{et} \quad W_0 = c_0 \int_{-\infty}^0 (U^2 + V^2) dy_2$$

on trouve :

$$H = \left(\frac{c_{g0} W_0}{c_g W} \right)^{1/2} \quad (38)$$

Cette relation permet de calculer l'évolution de l'amplitude H en fonction de la valeur de $(fD)_*$ en se fixant la valeur $H = 1$ en épaisseur infinie.

Les résultats du calcul numérique effectué pour $\nu = 1/3$ sont reproduits dans le tableau 12 et sur la figure 15.

4 - CONCLUSION

Une plaque élastique constitue un milieu dispersif, pour les ondes élastiques qui s'y propagent, lorsque son épaisseur devient comparable avec leur longueur d'onde. On est alors en présence d'ondes de Lamb dont la célérité varie en fonction de $(fD)_*$, cette variation étant imposée par les conditions aux limites que constituent les surfaces libres de la plaque.

Ces ondes ont un caractère assez complexe, ne serait-ce qu'à cause du nombre important de modes pouvant exister dans la plaque pour une valeur donnée de $(fD)_*$. Mais si l'on ne s'intéresse qu'au 1er mode asymétrique, soit aux ondes de flexion, et si l'on ne considère que ses manifestations extérieures, à savoir : célérité de phase, de groupe, et amplitude, les lois obtenues sont relativement simples.

En outre, les ondes de Rayleigh ne sont qu'un cas particulier de ces ondes, celui où la longueur d'onde devient petite devant l'épaisseur de la plaque.

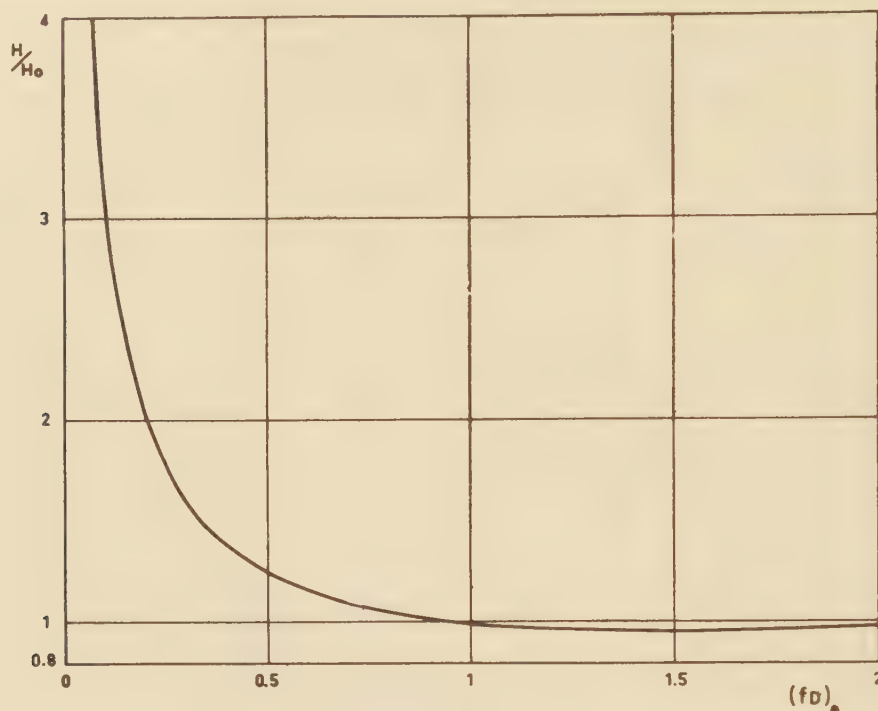


Figure 15 - Ondes de Lamb. 1er mode asymétrique. Evolution de l'amplitude en fonction de l'épaisseur. (Coefficient de Poisson $\nu = 0,33$).

Tableau 12

Ondes de Lamb 1er mode asymétrique :
Variation de l'amplitude en fonction de l'épaisseur
(Coefficient de Poisson $\nu = 0,33$)

$(fD)_0$	V_s/U_s	H	$(fD)_0$	V_s/U_s	H
2,7056	1,5640	0,9892	0,4025	1,4800	1,3787
2,1379	1,5603	0,9741	0,3841	1,4855	1,4117
1,8936	1,5560	0,9659	0,3664	1,4918	1,4466
1,6130	1,5482	0,9585	0,3493	1,4991	1,4833
1,4353	1,5414	0,9574	0,3328	1,5074	1,5224
1,3043	1,5333	0,9610	0,3169	1,5164	1,5634
1,2003	1,5265	0,9671	0,3014	1,5275	1,6077
1,1140	1,5193	0,9755	0,2864	1,5396	1,6546
1,0403	1,5127	0,9855	0,2718	1,5532	1,7049
0,9760	1,5059	0,9971	0,2577	1,5680	1,7586
0,9190	1,4998	1,0097	0,2439	1,5850	1,8165
0,8679	1,4945	1,0234	0,2305	1,6039	1,8791
0,8216	1,4891	1,0381	0,2175	1,6245	1,9465
0,7792	1,4840	1,0539	0,2048	1,6476	2,0198
0,7402	1,4798	1,0704	0,1924	1,6732	2,0998
0,7040	1,4765	1,0879	0,1803	1,7016	2,1873
0,6704	1,4729	1,1064	0,1684	1,7341	2,2845
0,6389	1,4704	1,1257	0,1569	1,7698	2,3912
0,6094	1,4682	1,1459	0,1456	1,8101	2,5107
0,5815	1,4667	1,1672	0,1345	1,8558	2,6451
0,5520	1,4698	1,1910	0,1237	1,9074	2,7968
0,5302	1,4654	1,2127	0,1130	1,9676	2,9719
0,5064	1,4664	1,2372	0,1026	2,0364	3,1737
0,4838	1,4676	1,2627	0,0924	2,1160	3,4097
0,4621	1,4593	1,2896	0,0874	2,1603	3,5433
0,4414	1,4723	1,3179	0,0824	2,2102	3,6907
0,4216	1,4753	1,3474	0,0775	2,2630	3,8521

Chapitre VI

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX CONCERNANT LES ONDES DE LAMB

1 - GÉNÉRALITÉS

Dès 1885, Lord Rayleigh étudiait mathématiquement les ondes élastiques se propageant à la surface d'un milieu élastique semi-infini [10]. En 1889, il traitait ainsi que Lamb [11] le cas d'ondes à deux dimensions se propageant dans un solide limité par deux plans parallèles, dans le cas simple où la longueur d'onde est grande devant l'épaisseur du milieu.

Peu après, Lamb examinait à nouveau le problème pour une longueur d'onde quelconque vis-à-vis de l'épaisseur. En 1916, il publiait le résultat de son travail [11], qui démontrait théoriquement l'existence d'une infinité d'ondes possibles dans une plaque et fournissait une méthode permettant de calculer la célérité de ces ondes en fonction de l'épaisseur de la plaque et de la fréquence.

Depuis, de nombreux auteurs ont repris le calcul de Lamb sous des formes légèrement différentes et ont étudié expérimentalement quelques caractéristiques de ces ondes ; nous les citerons au fur et à mesure que nous utiliserons leurs résultats.

Il fallut attendre 1945 - 1950 pour pouvoir produire pratiquement les "ondes de Lamb" et songer à les utiliser à des fins pratiques. C'est en effet en 1951 que Firestone et Ling [17] faisaient breveter un procédé pour produire les "ondes de Lamb" et les utiliser pour des essais non-destructifs de matériaux, à des fréquences ultrasonores. Plusieurs articles ont été publiés depuis ([18] à [24]) concernant ces essais par les ondes de Lamb et de Rayleigh.

Leurs auteurs ne se sont livrés qu'à une étude sommaire de la propagation de ces ondes, concentrant leurs efforts à peu près uniquement sur l'étude de leur célérité. Dans l'ensemble, les propriétés de ces ondes sont peu connues. Nous insisterons tout spécialement sur le 1er mode asymétrique qui nous intéresse.

A notre connaissance, en dehors des essais non-destructifs, les ondes de Lamb n'ont pas reçu d'autres applications pratiques. Mais, parallèlement, l'étude théorique des ondes élastiques dans les milieux stratifiés (ondes de Rayleigh, de Love) s'est considérablement développée dans les études sismologiques, puisqu'on a découvert l'existence de telles ondes lors des secousses sismiques.

Dans ce qui suit, nous allons essayer de faire une synthèse des résultats qui se dégagent de ces différents travaux en suivant le plan ci-dessous :

- Génération et détection des ondes de Lamb et de Rayleigh.
- Célérité - longueur d'onde.
- Trajectoire des particules.
- Energie, amortissement.
- Réflexion, réfraction, diffraction.

2 - GÉNÉRATION DES ONDES DE LAMB ET DE RAYLEIGH [16] [17]

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour produire des ondes de Lamb ou de Rayleigh dans une plaque élastique. Dans un article récent, Viktorov [16] discute théoriquement et expérimentalement quatre de ces méthodes, à savoir :

- Cristal émetteur taille X en contact acoustique avec la plaque.
- Cristal émetteur taille Y en contact acoustique avec la plaque.
- Méthode du "peigne".
- Méthode du "coin".

Cette étude de Viktorov ne se rapporte qu'au cas des ondes de Rayleigh, mais nous pensons que l'on pourrait mener une étude semblable pour les ondes de Lamb moyennant un supplément de complexité. On aboutirait vraisemblablement à des conclusions identiques du point de vue qualitatif, les ondes de Rayleigh et les ondes de Lamb étant identiques, les premières n'étant qu'un cas particulier limite des secondes.

C'est pourquoi nous utiliserons ici, pour les ondes de Lamb également, les conclusions de Viktorov, sans toutefois affirmer qu'elles sont valables dans ce cas.

La partie théorique de cette étude a été conduite en supposant que l'action du générateur d'ondes de Rayleigh sur la surface de la plaque est équivalente à l'action des contraintes appliquées sur la surface par ce même générateur et que ce dernier a une dimension infinie suivant l'axe Oz (axe situé sur la surface et perpendiculaire à la direction Ox de propagation des ondes).

La partie expérimentale confirme assez bien du point de vue qualitatif la théorie.

Nous insisterons ici plus particulièrement sur les deux dernières méthodes, les plus efficaces, et surtout sur la dernière, de loin la plus employée, et découverte la première [17].

a - Méthode des cristaux taille X et Y

Cette méthode consiste simplement à placer le cristal émetteur taille X ou Y directement en contact avec la surface de la plaque avec la seule interposition d'une pellicule de couplage (liquide pour la taille X, solide pour la taille Y) (figure 16.a). Soit $2a$ sa dimension suivant l'axe Ox, direction de propagation des ondes de Rayleigh ; Viktorov a montré que l'amplitude des ondes produites dépend sinusoidalement de la quantité $2a$ et qu'elle est maximale pour :

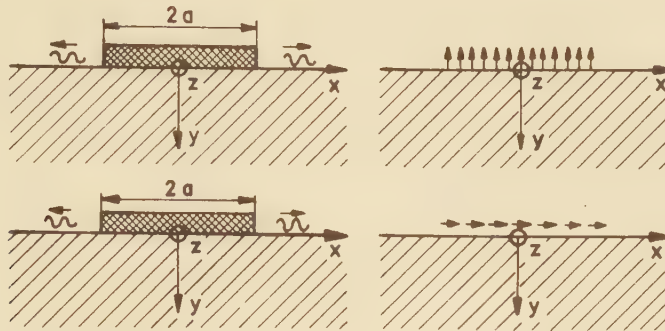
$$2a = (2k + 1) \frac{\Lambda}{2}$$

mais cette valeur maximale ne dépend pas de cette même quantité $2a$.

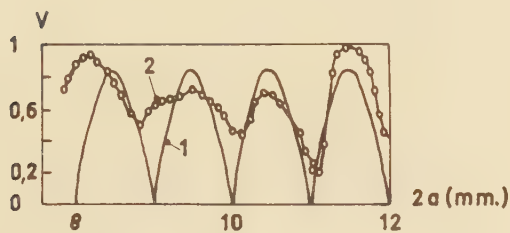
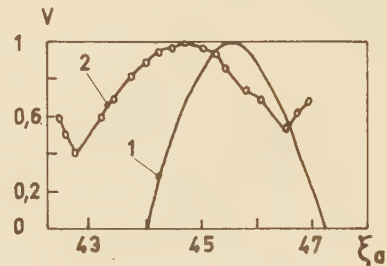
Les figures 16.b et 16.c donnent les courbes théoriques (1) et expérimentales (2) de Viktorov (ξ est le nombre d'onde).

b - Méthode du "peigne"

La méthode proposée par A.G. Sokolinskii consiste à engendrer, au moyen d'une structure en forme de peigne, un ensemble de contraintes, normales à la surface de la plaque, ayant une période spatiale Λ égale à la longueur d'onde de l'onde à produire. On arrive à ce résultat en disposant par exemple une plaque de métal pourvue de dents et de creux, en nombre m et d'espacement régulier égal à b , entre le cristal émetteur taille X et la plaque (figure 16.d).



a - Emission par cristaux taille X et Y, contraintes appliquées.

Amplitude de l'onde produite en fonction de la quantité $2a$ 

b - Cristal taille X

c - Cristal taille Y



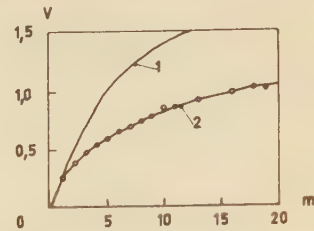
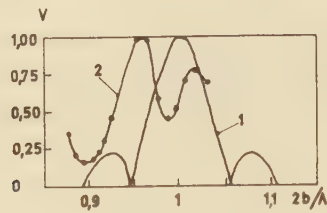
d - Emission par la "méthode du peigne", contraintes appliquées.

Figure 16 - Génération des ondes de Rayleigh et de Lamb.

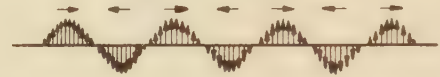
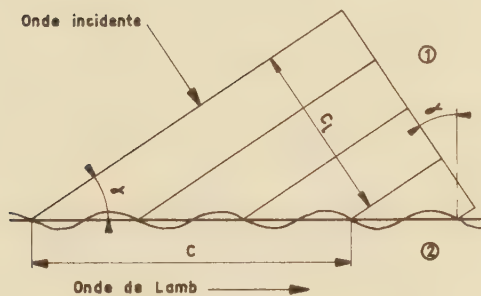
La théorie et l'expérience montrent que l'amplitude de l'onde produite caractérisée par les déplacements en surface, dépend beaucoup de la période spatiale des dents ; un maximum très prononcé a lieu évidemment lorsqu'elle est égale à celle de l'onde que l'on désire produire, c'est-à-dire lorsque $b = \Lambda/2$ (figure 17.a).

L'acuité de ce maximum est proportionnelle à la dimension $2a$ de la structure dans la direction Ox . En outre l'amplitude maximale obtenue pour $b = \Lambda/2$ est elle-même proportionnelle à cette quantité $2a$, tout au moins en théorie, l'expérience montrant l'existence d'une certaine saturation (courbes 1 et 2, figure 17.b).

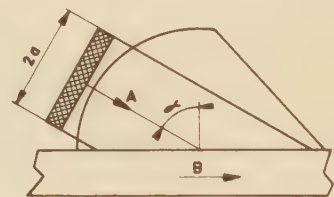
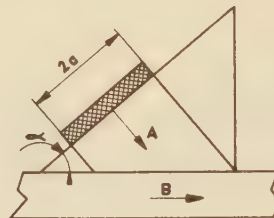
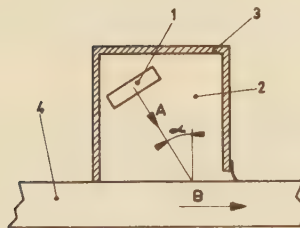
Enfin ce système produit des ondes se propageant dans deux directions opposées (x positifs et x négatifs) et ayant des amplitudes égales.



Emission par la "méthode du peigne"

a - Variation de l'amplitude en fonction de $2b/\lambda$ b - Variation de l'amplitude maximale en fonction de m .

c - Emission par la "méthode du coin" - contraintes appliquées



d - Dispositifs d'émission par la "méthode du coin"

Figure 17 - Génération des ondes de Rayleigh et de Lamb.

c - Méthode du "coin"

Cette méthode, à notre connaissance la première utilisée, a été brevetée par Firestone et Ling [17]. Elle a été appliquée aussi bien aux ondes de Lamb qu'aux ondes de Rayleigh.

Elle consiste à envoyer, sur une face de la plaque et sous un angle d'incidence donné, une onde de célérité et de fréquence déterminées.

L'onde incidente ayant une célérité c_1 dans le milieu (1) (voir figure 17.c) et l'onde de Lamb que l'on désire produire dans la plaque (2) ayant une célérité c , l'angle d'incidence α produisant l'onde de Lamb est donné par la formule :

$$\sin \alpha = \frac{c_1}{c}$$

On remarque que cette formule n'est autre que la loi régissant la réfraction des ondes ultrasonores, $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = c_1 / c_2$, avec réfraction totale de l'onde de Lamb (c'est-à-dire $\alpha_2 = 90^\circ$, $c_1 = c_1$, $c_2 = c$).

$c_1 / \sin \alpha$ est la célérité avec laquelle la ligne d'intersection du front de l'onde dans le milieu (1) et de la surface de la plaque se déplace le long de cette dernière. Lorsqu'elle est égale à la célérité de l'onde de Lamb, l'onde incidente produit donc une distribution de contraintes normales et tangentielles de même périodicité spatiale que l'onde de Lamb.

On peut ainsi produire n'importe quel mode de Lamb pour n'importe quelle épaisseur de la plaque à n'importe quelle fréquence, à condition toutefois que l'on puisse disposer d'un milieu (1) pour lequel la célérité de l'onde incidente c_1 est inférieure à la célérité c de l'onde que l'on désire produire.

La fréquence de l'onde incidente et l'épaisseur de la plaque étant fixées, le choix de l'angle α détermine le type d'onde qui sera produit.

Du point de vue pratique, l'émetteur utilisé par Firestone et Ling est constitué de la façon suivante (figure 17.d).

Le transducteur 1 est immergé dans un liquide 2 situé à l'intérieur d'une enceinte 3. Il est monté sur un axe afin de pouvoir faire varier l'angle d'incidence α par pivotement. Les ondes longitudinales A émises dans le liquide viennent frapper la surface de la plaque 4 et y produisent les ondes de Lamb B.

Celles-ci sont facilement amorties par un corps rigide mis en contact avec la surface de la plaque. C'est pourquoi l'enceinte ne repose pas sur cette dernière du côté où sortent ces ondes. On laisse une fine fente si l'on peut se permettre une fuite de liquide; on dispose une membrane en caoutchouc dans le cas contraire.

Ce dispositif a été utilisé avec succès par ceux qui ont utilisé les ondes de Lamb et de Rayleigh.

Certains ont immergé la plaque entière dans une cuve contenant un liquide, ce qui permet de supprimer l'enceinte, mais amortit les ondes.

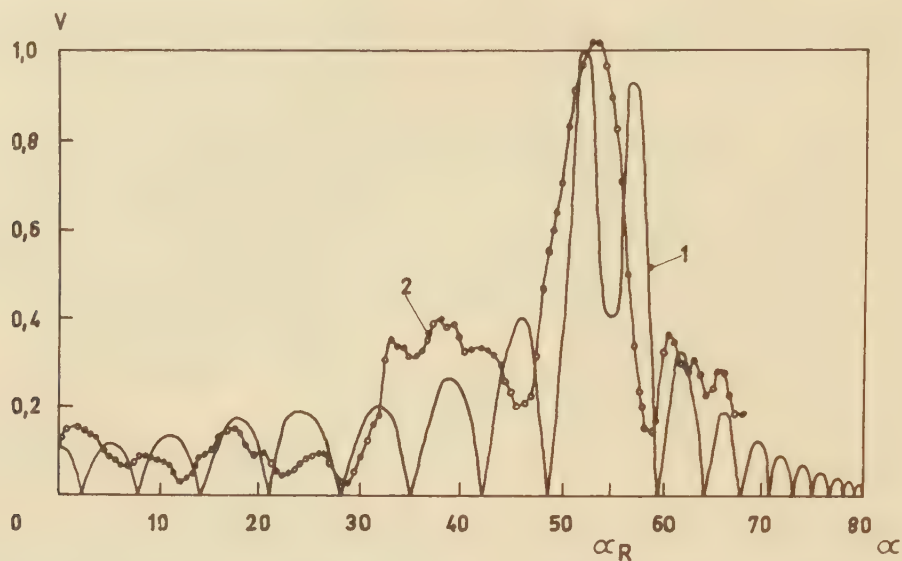
D'autres ont remplacé le milieu liquide par un milieu solide (matière plastique par exemple). A l'ensemble ci-dessus est alors substitué un simple coin solide (figure 17.d), d'où le nom de la méthode. Le contact acoustique avec la plaque est alors assuré par une mince pellicule liquide (par exemple huile de ricin).

Les conclusions de Viktorov pour cette "méthode du coin" sont assez identiques à celles concernant "la méthode du peigne".

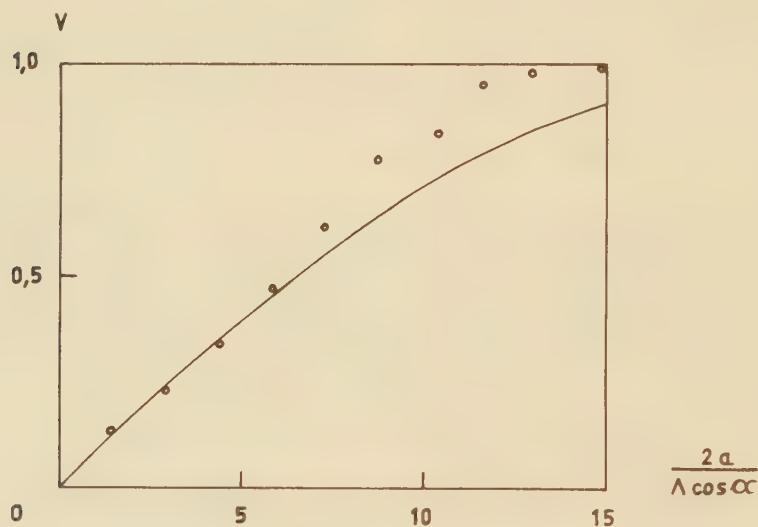
L'amplitude dépend énormément de la période spatiale des contraintes appliquées, c'est-à-dire ici de l'angle α . L'acuité du maximum et sa valeur sont proportionnelles à la dimension de l'émetteur suivant Ox, c'est-à-dire à $2a / \cos \alpha$ (figures 18.a et b). Il n'y a pas de saturation comme dans le cas du "peigne". En outre, ce système produit des ondes dans les deux directions opposées qui sont d'inégale amplitude, celle dans le sens des x négatifs ayant une amplitude plus petite qui devient négligeable dans le cas où l'angle α est parfaitement ajusté.

d - Comparaison des deux dernières méthodes

Viktorov a étudié la transmission d'une impulsion à travers ces différents systèmes. Il a montré que lorsqu'on applique une telle impulsion à un transducteur émetteur, seule la "méthode du coin" donne une onde de Rayleigh ayant une enveloppe de même forme. En effet la "méthode du peigne" (et les deux premières méthodes) déforme l'impulsion et en augmente la durée. Ceci est dû à la constante de temps d'établissement et d'amortissement des oscillations dans la région d'application des contraintes, constante égale à



a - Emission par la "méthode du coin". Amplitude en fonction de l'angle α



b - Emission par la "méthode du coin". Amplitude en fonction de $2a/\lambda \cos \alpha$

Figure 18 - Génération des ondes de Rayleigh et de Lamb.

$2a/c$. Par contre, dans le "système du coin", les ondes engendrées suivent exactement les contraintes appliquées, le front de l'onde longitudinale incidente intersectant la surface de la plaque avec la vitesse même des ondes.

Viktorov a comparé les divers systèmes du point de vue de leur efficacité. Celle-ci est définie en mesurant le facteur de conversion K électro-acoustique et acoustico-électrique, c'est-à-dire le rapport d'amplitude du potentiel électrique sur l'émetteur au potentiel recueilli sur l'unité réceptrice. Pour tous les systèmes d'émission, le récepteur utilisé était un coin en polystyrène ; la fréquence était de 2,7 Mc. Le tableau ci-après donne les valeurs de K , en décibels, correspondant aux conditions d'émissions optimales,

c'est-à-dire donnant des amplitudes des ondes de Rayleigh maximales ($2b = \Lambda$, $\sin \alpha = c_1/c$). Il donne également à titre de comparaison la valeur de K pour l'émission d'ondes longitudinales. Le mode de production le plus efficace s'avère ainsi être la méthode du peigne, la méthode du coin ne venant que deuxième.

Méthode d'émission	K décibels
a - Cristal taille X contact acoustique par huile de ricin	56,8
b - Cristal taille Y contact acoustique par "ceresin"	56,4
c - "Peigne" en aluminium ($m = 19$ $2a = 18,5\Lambda$) contact acoustique par huile de ricin	41,1
d - Coin en polystyrène ($2a/\cos \alpha = 17\Lambda$) contact acoustique par colle B. F. 4	51,0
e - Emission et réception d'ondes longitudinales par cristaux taille X contact acoustique par huile de ricin	35,3

Mais outre l'avantage de ne pas déformer les impulsions, la "méthode du coin" possède les qualités suivantes : Tout d'abord elle a fait "ses preuves", étant l'objet de nombreuses applications pratiques. Ensuite elle permet une variation facile de l'angle α , donc du type d'onde que l'on désire produire et un ajustement commode de cet angle à sa valeur optimale (amplitude maximale). Ces variations de α s'obtiennent très simplement dans le cas du coin liquide en faisant pivoter l'émetteur dans le liquide ; un peu moins simplement, en faisant glisser ce même émetteur sur une face cylindrique du coin lorsque ce dernier est solide. La "méthode du peigne", pour aboutir au même résultat, nécessite un changement de la pièce en "peigne" dans le but de changer la période spatiale des contraintes appliquées. Enfin le "coin" ne produit une onde de Rayleigh que dans une seule direction.

Par contre, il présente un défaut grave ; il faut pouvoir disposer d'un milieu, pour constituer le coin, tel que $c_1 < c$, ce qui n'est pas toujours facile à trouver ou même parfois impossible, dans le cas d'une plaque en matériau de faible célérité. La méthode du peigne, au contraire, ne semble limitée de ce point de vue que par la possibilité de pouvoir tailler des dents assez fines.

3 - DÉTECTION DES ONDES DE LAMB

Réciproquement à la génération des ondes par la méthode du coin, Lyamskev et Rudakov [25] ont montré qu'une plaque immergée dans un liquide et dans laquelle se propage une onde de Lamb de célérité c rayonne de l'énergie dans le liquide suivant une direction "de résonance" dont l'angle α avec la normale à la plaque est identique à celui utilisé pour la génération de ces mêmes ondes par injection d'ondes longitudinales et donc donné par la relation :

$$\sin \alpha = \frac{c_1}{c}$$

On peut donc utiliser le procédé inverse de la "méthode du coin" pour recevoir les ondes de Lamb. C'est ce que proposaient Firestone et Ling dans leur brevet et ce qui a

été employé par tous ceux qui ont travaillé sur ces ondes.

De même que pour l'émission, on utilise une enceinte remplie de liquide, dans lequel se trouve un récepteur pivotant. En étudiant l'amplitude de l'onde longitudinale reçue en fonction de l'angle α , on détecte les différents modes d'onde de Lamb se propageant dans la plaque d'après la position des maximums et leurs amplitudes d'après les valeurs de ces maximums. Nous donnerons quelques exemples dans le paragraphe "Célérité - Longueur d'onde".

Le coin liquide peut être remplacé, comme pour l'émission, par un coin solide.

Les trois autres procédés d'émission (taille X, taille Y, peigne) peuvent être, d'après Viktorov, utilisés pour recevoir les ondes de Rayleigh ; mais nous n'en connaissons pas d'application pratique.

4 - CÉLÉRITÉ - LONGUEUR D'ONDE

a - Célérité de phase

Nous avons, dans l'étude théorique, donné les équations des célérités de phase des ondes de Lamb. Ces équations ont été reprises depuis sous des formes très légèrement différentes. Signalons celle proposée par Worlton [23] qui fait intervenir les quantités R_s et R_L définies dans le tableau des notations. Cette présentation a l'avantage de faire intervenir le milieu constituant la plaque uniquement par les valeurs de c_s et c_L , qui peuvent être mesurées expérimentalement. Divers calculs numériques ont été conduits afin de tracer les courbes des célérités pour différents matériaux. Nous avons reproduit sur la figure 20, à titre d'exemple, les courbes de Firestone pour l'aluminium. On peut également tracer un réseau de courbes normalisées pour chaque valeur du rapport c_L/c_s , c'est-à-dire pour chaque valeur du coefficient de Poisson ν ; c'est ce que nous avons fait dans l'étude théorique pour les 1ers modes symétrique et asymétrique avec $\nu = 0,25$ et $\nu = 0,5$.

Ces quantités sont reliées par la relation :

$$\frac{c_s}{c_L} = \left[\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \right]^{1/2}$$

et l'équation donnant la célérité des ondes de Rayleigh s'écrit :

$$\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^6 - 8 \left(\frac{c_R}{c_s}\right)^4 + 8 \left(3 - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}\right) + \left(\frac{c_R}{c_s}\right)^2 - 16 \left[1 - \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}\right] = 0$$

Bergmann en donne l'approximation suivante :

$$\frac{c_R}{c_s} = \frac{0,87 + 1,12 \nu}{1 + \nu}$$

Cook et Valkenburg [14] ont tracé les courbes donnant c_R/c_s et c_L/c_s en fonction du coefficient de Poisson. Nous les avons reproduites sur la figure 19.b.

Les courbes de célérité des ondes de Lamb calculées, sont confirmées expérimentalement par les essais non destructifs qui utilisent ces ondes. Les valeurs de l'angle α mesurées lors de la génération de ces ondes dans des plaques de matériau et d'épaisseurs diverses, à diverses fréquences, permettent en effet de calculer les valeurs de la célérité c correspondante.

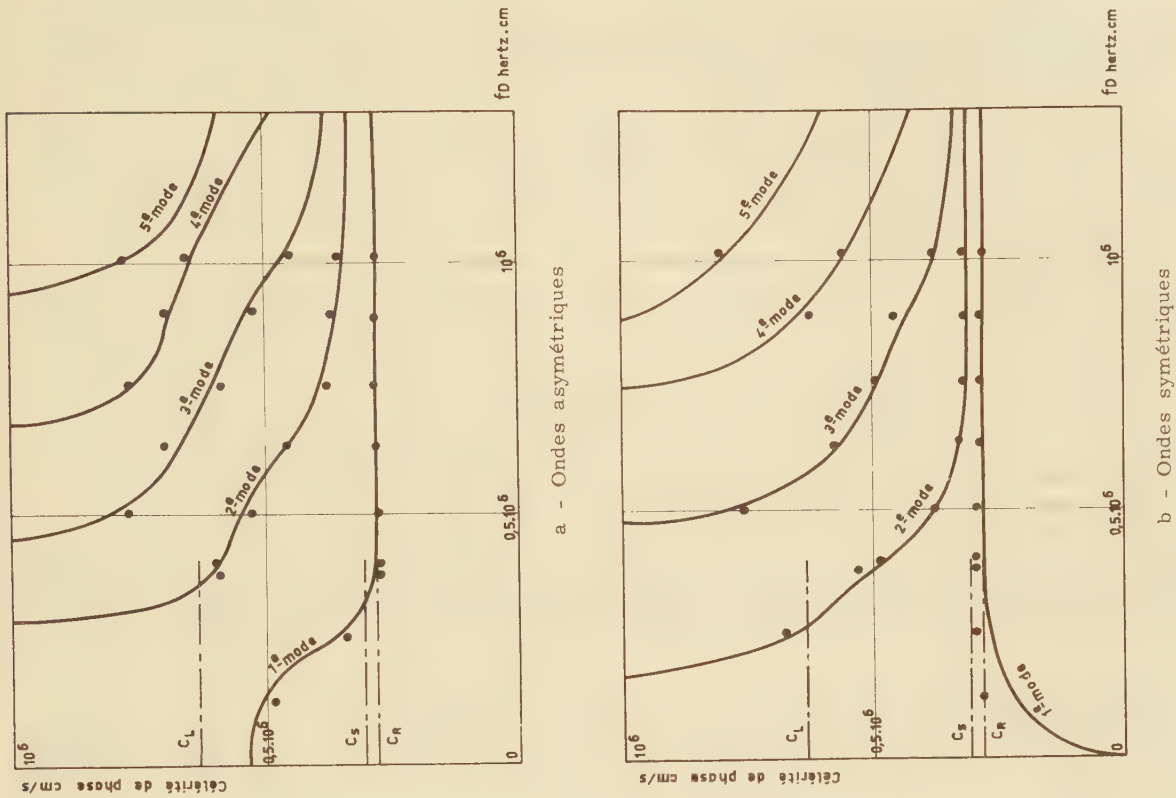
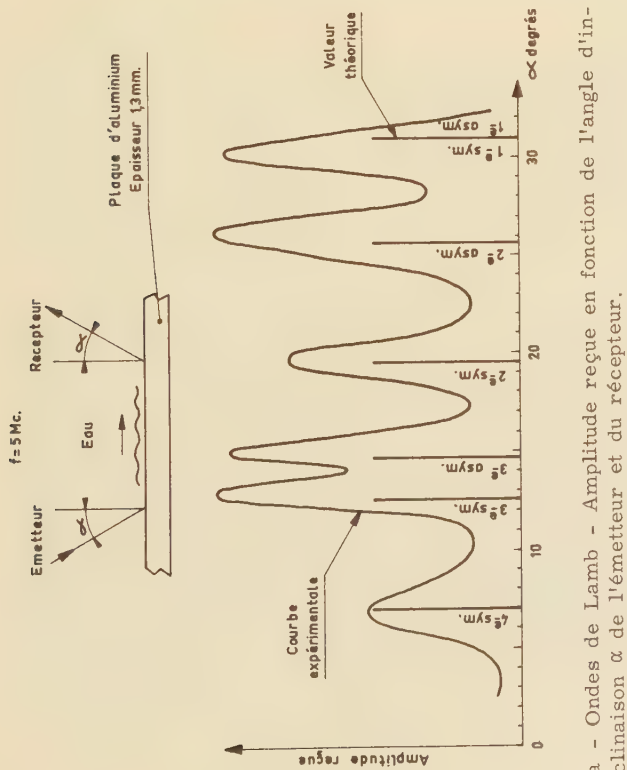
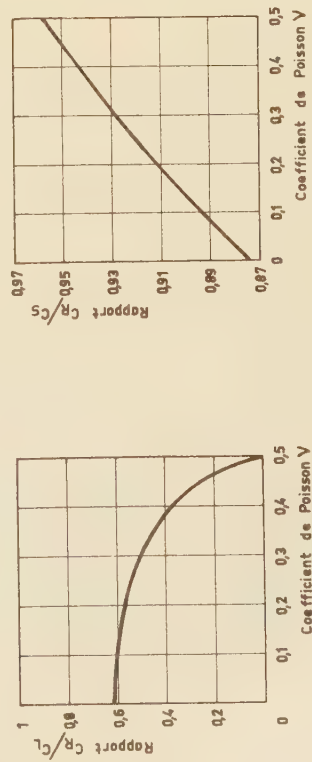


Figure 20 - Célérité de phase des ondes de Lamb dans l'aluminium. Courbes théoriques et points expérimentaux. (d'après Worlton).



a - Ondes de Lamb - Amplitude reçue en fonction de l'angle d'incidence α de l'émetteur et du récepteur.



b - Rapports de la célérité des ondes de Rayleigh (c_R) à celles des ondes longitudinales (c_L) et transversales (c_S) en fonction du coefficient de Poisson ν

Figure 19 - Célérité des ondes de Rayleigh et de Lamb.

Les points obtenus se placent bien sur les courbes théoriques. Worlton a mené une vérification systématique des courbes de célérité dans l'aluminium, de Firestone, en opérant de la façon suivante :

Une plaque d'aluminium d'épaisseur D est immergée dans l'eau. Un transducteur émetteur 1 produit un faisceau d'ondes longitudinales arrivant sur la plaque sous une incidence α . Un transducteur récepteur 2 reçoit l'énergie rayonnée par la plaque ; il est incliné par rapport à celle-ci du même angle α (figure 19a). On fait varier l'angle α et on mesure l'amplitude reçue.

Cette amplitude présente des maximums très marqués pour les valeurs de α correspondant aux différents modes des ondes de Lamb pouvant exister dans la plaque considérée. La figure 19a montre la forme des courbes obtenues. Les traits verticaux correspondent aux valeurs de α calculées.

Worlton a conduit ses essais au moyen d'impulsions ultrasonores à une fréquence de l'ordre du mégacycle. Des valeurs mesurées de α il a tiré les célérités c correspondantes. Les points correspondants sont placés sur les courbes théoriques (figure 20).

L'accord entre la théorie et l'expérience est bon dans l'ensemble. Il faut cependant remarquer que le nombre de points de mesure n'est pas suffisant pour vérifier avec précision la courbe de célérité d'un mode déterminé. Par exemple, dans le cas du premier mode asymétrique qui nous intéresse, la célérité décroissante pour les faibles valeurs de $(fD)_*$ n'est vérifiée que par un seul point situé nettement à côté de la courbe théorique.

b - Longueur d'onde

La longueur d'onde Λ se déduit évidemment de la célérité c , si l'on connaît la fréquence f , par la relation $\Lambda = c/f$. Inversement, en mesurant la longueur d'onde, par exemple en visualisant les ondes, on peut en tirer la célérité c .

c - Célérité de groupe

La célérité de phase des ondes de Lamb dépendant de la fréquence f et de l'épaisseur de la plaque, cette dernière constitue un milieu dispersif. Nous devons donc faire appel à une notion importante : celle de célérité de groupe ; c'est la vitesse avec laquelle se déplace l'enveloppe d'une onde modulée c'est-à-dire l'énergie.

Nous avons donné la méthode de calcul de cette célérité de groupe dans la partie théorique et avons effectué le calcul numérique dans le cas du premier mode asymétrique pour $\nu = 0,25$ et $\nu = 0,33$.

Dans ce cas, lorsque $(fD)_*$ tend vers l'infini, la célérité de groupe tend vers c_R . Lorsque $(fD)_*$ tend vers zéro, elle tend également vers zéro après être passée par un maximum pour $(fD)_* = 0,45$ environ.

On peut trouver un assez grand nombre de courbes donnant la célérité de groupe pour divers modes et divers coefficients de Poisson dans les références [12] [13] et [21].

Grigsby et Tajchmann ont vérifié expérimentalement quelques valeurs calculées de c_g dans le cas de l'acier. Ils procédaient de la façon suivante : un émetteur constitué d'un coin en plexiglas envoie une onde de Lamb sous forme d'impulsion ; un récepteur identique le reçoit et l'on mesure le temps de propagation pour deux distances de parcours différentes. Le rapport de la différence des distances à la différence des temps de parcours donne la célérité de groupe. L'accord entre le calcul et l'expérience est bon ; le tableau ci-après, tiré de la référence [13], le montre.

Epaisseur de la plaque mm	Fréquence Mc	Célérité de phase, m/s	Célérité de groupe, m/s	
			expérimentale	calculée ($c_L/c_s = 1,8$)
3,175	3,14	7840	1905	1790
0,794	2,99	4165	1775	1809
0,794	9,13	4165	2305	2260
0,794	4,95	5790	4795	4960
0,794	5,40	5790	4845	4325
0,794	8,70	5940	4590	4925

5 - TRAJECTOIRE DES PARTICULES

Le calcul théorique montre que les trajectoires des particules sont des ellipses dont le grand axe est toujours vertical.

Leur aplatissement varie de façon assez complexe en fonction de la position du point considéré dans la plaque, de l'épaisseur de celle-ci par rapport à la fréquence et du coefficient de Poisson.

Les courbes théoriques pour $\nu = 0,25$ que nous avons jointes à l'étude théorique (figures 12 à 14, Chapitre V) tentent d'en montrer quelques caractéristiques ; nous n'ajouterons rien ici.

Aucune vérification expérimentale n'en a, à notre connaissance, été faite.

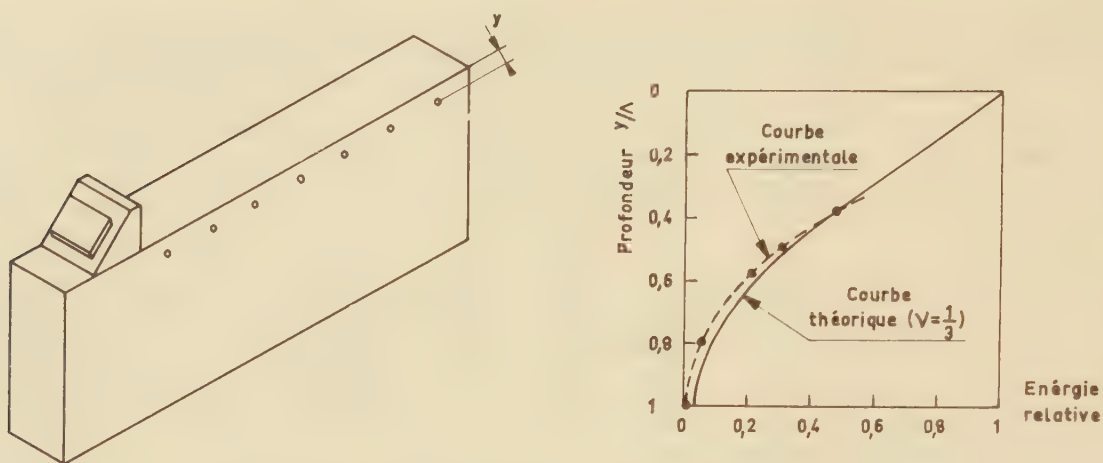
6 - ÉNERGIE

Nous avons tracé les courbes théoriques de la répartition de l'énergie avec la profondeur sur la figure 14 de la partie théorique (Chapitre V) pour diverses valeurs du produit $(fD)_*$. Elles montrent une décroissance monotone lorsque l'on se déplace de la surface de la plaque vers son centre ; cette décroissance étant d'autant plus rapide par rapport à la variable sans dimension Y/D que $(fD)_*$ est plus petit.

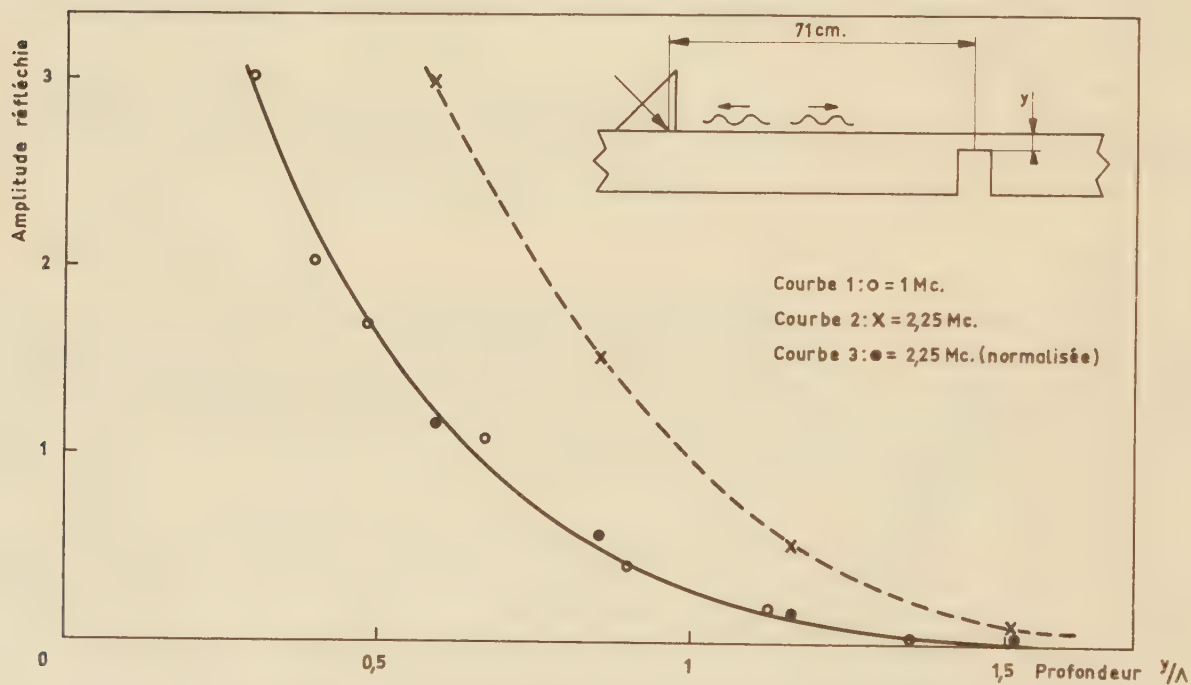
Dans le cas des ondes de Rayleigh, la densité d'énergie tend vers zéro lorsque l'on s'éloigne de la surface.

Dans le cas des ondes de Lamb, elle présente un minimum non nul au centre de la plaque, mais qui tend vers zéro lorsque l'épaisseur de la plaque augmente, c'est-à-dire lorsque l'on tend vers le cas des ondes de Rayleigh.

Cook et Valkenburg [14] ont procédé à une vérification expérimentale sommaire de la répartition de l'énergie avec la profondeur dans le cas des ondes de Rayleigh : un bloc d'aluminium (figure 21a) est percé de sept trous de diamètre 0,457 mm situés à sept profondeurs différentes en dessous de la surface allant de 0,483 à 2,26 mm. Les ondes de surface sous forme d'impulsions de fréquence 2,25 Mc sont produites et reçues par un coin en matière plastique. Les carrés des amplitudes des signaux réfléchis par les différents trous donnent une estimation de l'énergie relative à différentes profondeurs. Malheureusement, les trois trous de profondeur inférieure à 0,38 n'ayant pas donné de résultat, le suivant étant utilisé comme base de comparaison avec la théorie, seuls trois points permettent la vérification.



a - Amplitude du signal réfléchi par un trou en fonction de sa profondeur (d'après Cook et Van Valkenburg)



b - Amplitude du signal réfléchi par un sillon en fonction de sa profondeur (d'après Binczewski).

Figure 21 - Ondes de Rayleigh - Répartition de l'énergie.

Binczewski [22], dans le même but, a réalisé une mesure semblable : l'amplitude mesurée est celle de l'onde réfléchie par un sillon carré, creusé dans une plaque épaisse sur la face opposée à l'émetteur, en fonction de la profondeur y de ce sillon. Le milieu utilisé est toujours l'aluminium et la fréquence de 1 Mc et 2,25 Mc. La figure 21b donne le niveau de réponse en fonction de la quantité y/Λ (Λ longueur d'onde).

Cette amplitude réfléchie n'étant vraisemblablement pas rapportée à l'amplitude incidente, les deux courbes 1 et 2 obtenues pour 1 et 2,25 Mc ne coïncidaient pas. Mais une simple affinité d'axe Ox sur la courbe 2 rétablit l'accord (courbe 3).

7 - AMORTISSEMENT

L'amortissement des ondes de Rayleigh a été relativement bien étudié et celui des ondes de Lamb pratiquement pas.

a - Pour les premières on peut se référer aux travaux de Viktorov [26], Vinogradov [27], Press et Healy [28] et Binczewski [22].

Viktorov et Press [26] [28] ont montré qu'il est possible de relier le coefficient δ_R d'amortissement des ondes de Rayleigh aux coefficients δ_L et δ_S d'amortissement des ondes longitudinales et transversales dans le même milieu. Voici résumée la méthode utilisée :

La propagation d'une onde plane sinusoïdale amortie peut s'exprimer par : $e^{i(\omega t - kx)}$, k étant complexe et égal à $k = \omega/v = \omega/c - i\delta$, δ étant le facteur d'amortissement et v une célérité complexe qui, pour les ondes longitudinales, transversales et de surface, peut s'écrire :

$$v_L = c_L \left(1 + \frac{i}{Q_L}\right)^{1/2} \quad v_S = c_S \left(1 + \frac{i}{Q_S}\right)^{1/2} \quad v_R = c_R \left(1 + \frac{i}{Q_R}\right)^{1/2}$$

où :

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{\omega(\lambda' + 2\mu')}{\lambda + 2\mu} \quad \text{et} \quad \frac{1}{Q_S} = \frac{\omega\mu'}{\mu}$$

λ' et μ' sont ici les coefficients de dissipation interne.

On obtient $1/Q_R$ en fonction de $1/Q_L$ et $1/Q_S$ en introduisant les célérités complexes dans l'équation des ondes de Rayleigh généralisée :

$$\left(2 - \frac{v_R^2}{v_S^2}\right)^2 - 4 \left(1 - \frac{v_R^2}{v_L^2}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{v_R^2}{v_S^2}\right)^{1/2} = 0$$

On peut alors, par l'intermédiaire des nombres d'onde k complexes, calculer les coefficients d'amortissement δ_L , δ_S , δ_R des trois types d'onde, d'où la relation :

$$\delta_R = \frac{3k^6 - 16k^4 + 24k^2 - 16a^2}{k^2(3k^4 - 16k^2 - 16a^2 + 24)} \delta_S + \frac{16a^2(1 - k^2)}{k^2(3k^4 - 16k^2 - 16a^2 + 24)} \delta_L$$

L'introduction dans cette formule des valeurs courantes de $k = c_R/c_S$ et $a = c_S/c_L$ montre que le terme en δ_S est nettement prépondérant devant le terme en δ_L . L'atténuation des ondes de Rayleigh est donc liée étroitement à celle des ondes transversales. Dans le cas de l'acier par exemple, on trouve $\delta_R = 0,89 \delta_S + 0,11 \delta_L$ et pour l'aluminium :

$$\delta_R = 0,93 \delta_S + 0,07 \delta_L.$$

Des expériences sont venues confirmer d'une façon relativement satisfaisante cette relation.

La technique par impulsion de fréquence 2,7 Mc de Viktorov dans l'acier et l'aluminium [26] a donné en moyenne des résultats moitié de ceux prédits par la formule ci-dessus. Mais Viktorov attribue ce désaccord au fait que la surface des échantillons utilisés était soigneusement polie, présentant ainsi une qualité acoustique supérieure à celle de l'intérieur du matériau dans lequel se propagent les ondes longitudinales et transversales. Cette hypothèse est confirmée par plusieurs travaux [31] [32] et notamment celui de Viktorov [29] qui, grâce à des mesures systématiques de l'amortissement en fonction de l'état de surface, prouvent une nette influence de ce dernier.

Press et Healy [28] ont conduit des essais, toujours par une technique d'impulsion, sur des échantillons de plexiglas dans la gamme de fréquence 20-180 kc. Les résultats sont en bon accord avec la relation précédente. La figure 22, qui donne les valeurs de δ_L , δ_S et δ_R en fonction de la fréquence, le prouve.

Les droites en trait plein ont été tracées de manière à donner le meilleur accord possible avec les points expérimentaux (méthode des moindres carrés). Celle en trait pointillé donne le coefficient théorique δ_R pour les ondes de Rayleigh.

Il est à noter que les mesures ont été effectuées non pas dans un milieu semi-infini, mais dans une demi-plaque, milieu possédant une dimension, perpendiculaire à la direction de propagation des ondes, petite devant la longueur d'onde. Les ondes longitudinales de milieu infini sont alors remplacées par des "ondes longues" de célérité $c_1 = 2c_s(1 - c_s^2/c_L^2)^{1/2}$.

Mais, d'après les auteurs, la propagation de l'onde de Rayleigh sur le bord de la demi-feuille est analogue à celle sur la surface d'un demi-espace. La relation ci-dessus reste valable à condition d'y introduire les caractéristiques des ondes correspondantes.

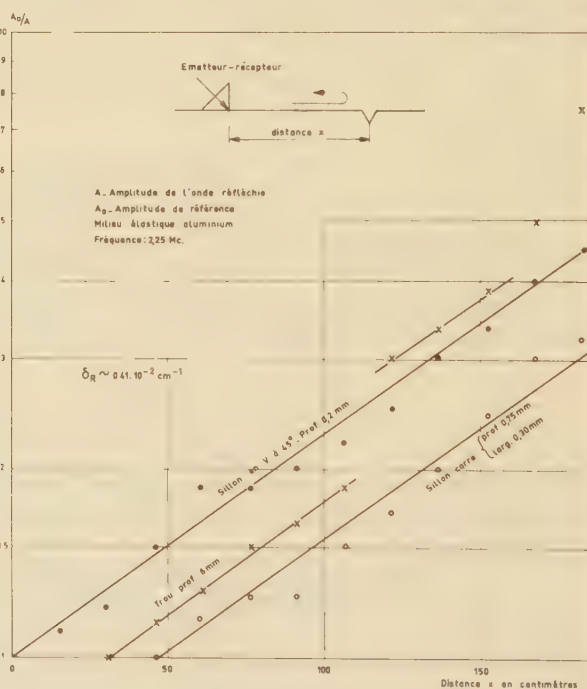
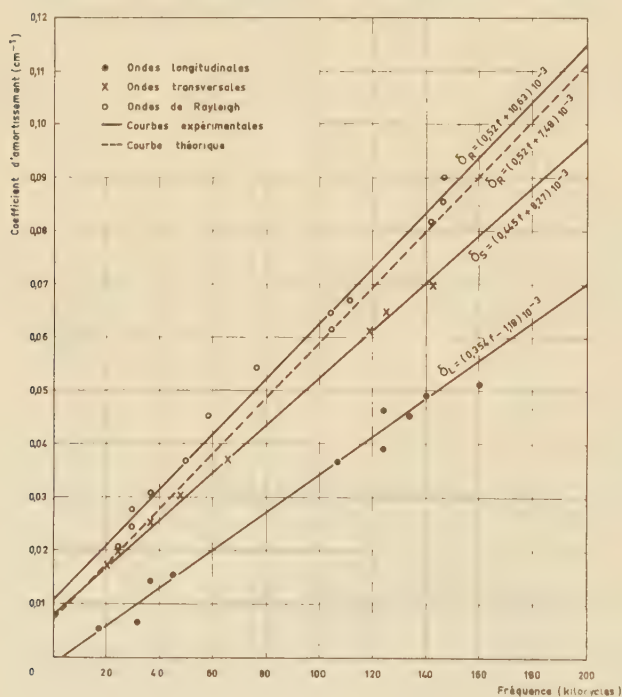


Figure 22 - Amortissement des ondes de Rayleigh.

Figure 23 - Amortissement des ondes de Rayleigh.

Coefficients d'amortissement expérimentaux et théoriques des ondes longitudinales, transversales et de Rayleigh dans le plexiglass en fonction de la fréquence (d'après PRESS and HEALY)

Amplitude de l'onde réfléchie par un défaut de surface en fonction de la distance (d'après BINCZEWSKI)

Il faut signaler également les recherches de Binczewski [22] qui, dans le but d'application pratique à l'essai des matériaux, a étudié le signal réfléchi par un défaut de surface en fonction de la distance qui le sépare de l'émetteur-récepteur constitué par un coin en plexiglas. Ce défaut était constitué soit par un sillon carré, ou en V à 45 degrés, soit par un trou creusé sous la surface.

Nous avons transposé les points expérimentaux obtenus sur le diagramme semi-logarithmique de la figure 23.

Ces points s'alignent bien sur des droites de même pente, excepté dans le cas du trou qui, au dire même de l'auteur, ne donnait pas de résultats reproductibles. La pente de ces droites nous donne approximativement un coefficient δ_R de $0,72 \times 10^{-2} \text{cm}^{-1}$ pour l'aluminium à une fréquence de 2,25 Mc.

b - En ce qui concerne les ondes de Lamb les résultats sont plus rares.

Pourtant Meitzler [32] s'est penché sur le problème de l'amortissement de ces ondes dans les plaques de métal en fonction des différents modes et de la fréquence.

Cette étude dépasse le cadre de notre sujet ; cependant l'auteur fait appel à un concept qui, selon nous, s'il n'est pas entièrement correct, part quand même d'une idée fort valable qui est la suivante :

Comme nous l'avons vu dans la partie théorique, les ondes de Lamb sont formées de deux types d'ondes élémentaires (longitudinales et transversales) qui interviennent mathématiquement sous la forme des deux fonctions potentielles φ et ψ . Chacune de ces ondes élémentaires entre pour une part déterminée dans la composition du mouvement, part variable en fonction du mode, de la fréquence ou de l'épaisseur.

Or, dans la plupart des milieux élastiques, les deux types d'ondes élémentaires présentent un amortissement différent. On conçoit donc que l'amortissement de l'onde de Lamb résultante doit dépendre de la part relative de ces ondes élémentaires.

Meitzler [32] fait intervenir cette proportion en utilisant la notion de "caractère" ainsi défini :

Les deux fonctions φ et ψ dépendent des deux coefficients A et B

$$\begin{cases} \varphi = A \operatorname{sh} \alpha y e^{i(\omega t - \xi x)} \\ \psi = B \operatorname{ch} \beta y e^{i(\omega t - \xi x)} \end{cases}$$

dont le rapport A/B, donné par la condition de contrainte nulle en surface, est égal à :

$$\frac{A}{B} = \frac{2i\xi\beta}{\xi^2 + \beta^2} \frac{\operatorname{sh} \beta e}{\operatorname{sh} \alpha e}$$

Ce rapport étant en général complexe et l'amortissement étant exprimé en termes d'énergie, le caractère c_a est défini par :

$$c_a = \left[\left(\frac{A}{B} \right) \cdot \left(\frac{A}{B} \right)^* \right]$$

Les ondes de caractère $c_a = 0$ sont alors composées d'un mouvement rotationnel ; à l'inverse, plus c_a est grand, plus le mouvement de dilatation devient important. D'où, les ondes de distorsion étant plus amorties que les ondes longitudinales dans le milieu considéré, la conclusion de l'auteur :

Les ondes ayant un caractère élevé, en particulier > 1 , présentent un amortissement inférieur à celles ayant un caractère plus faible. Les expériences de vérification semblent confirmer assez bien qualitativement ces considérations théoriques. Cependant peu de mesures concernent le premier mode asymétrique. En outre, le seul paramètre variable étant la fréquence, toutes les autres caractéristiques demeurent constantes ; ceci introduit des facteurs parasites tels que variation du couplage entre spécimen et transducteur, variation de l'amortissement avec la fréquence, résonance des transducteurs.

Nous donnons les résultats sur la figure 24a pour le premier mode asymétrique en ce qui concerne le caractère et l'atténuation pour un matériau de coefficient de Poisson $\nu = 0,33$.

Il est à noter que, pour ce premier mode asymétrique, le caractère décroît de façon monotone de 1 à zéro lorsque le produit épaisseur fréquence croît, ce qui, à la limite, laisse supposer que les ondes de Rayleigh ont un caractère nul, c'est-à-dire sont purement rotationnelles, ce qui n'est pas.

A notre avis, ceci provient du fait que le produit (fD) n'intervient pas seulement en ϕ et ψ par l'intermédiaire de A et B, mais aussi par les coefficients α et β des lignes hyperboliques. Le "caractère" défini par Meitzler représente donc mal les importances relatives de la dilatation et de la rotation.

Du point de vue expérimental, Worlton [18] a étudié l'amortissement des ondes dans les plaques immergées dans l'eau en notant l'amplitude de l'onde reçue en fonction de la distance séparant émetteur et récepteur. La valeur de δ obtenue est très grande ; elle est due à la présence de liquide sur les faces, liquide qui "prélève" une partie importante de l'énergie des ondes de Lamb.

On ne peut donc transposer au cas de la plaque dans l'air les résultats obtenus que d'un point de vue qualitatif, à savoir :

- l'amortissement diffère notablement d'un mode à l'autre et semble lié à l'excentricité des ellipses trajectoires des particules de surface ; lorsque le mouvement est à prédominance verticale, il est supérieur au cas d'un mouvement à prédominance horizontale ; ceci étant dû, d'après Worlton, au fait que les mouvements verticaux communiquent plus d'énergie au liquide que les mouvements horizontaux.

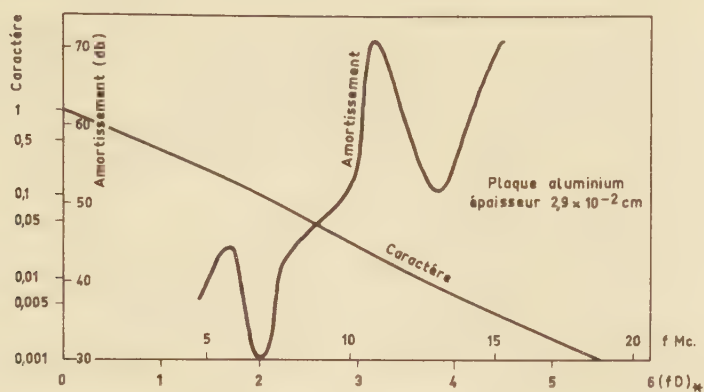
Si l'on suppose ce résultat vrai pour une plaque dans l'air, l'amortissement des ondes de Lamb premier mode asymétrique va en croissant lorsque l'épaisseur D décroît, la fréquence demeurant constante.

Nous avons reproduit sur la figure 24b les courbes d'amplitude obtenues par Worlton pour les 1ers modes, accompagnées des vecteurs u et v schématisant les axes des ellipses de surface.

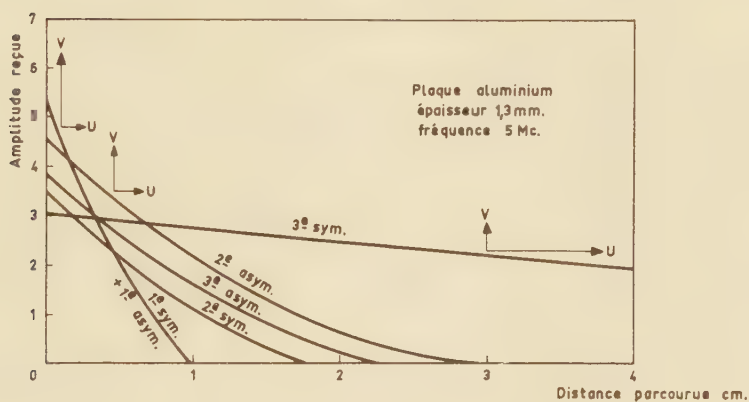
En résumé, on peut tirer les conclusions suivantes :

Les ondes de Lamb 1er mode asymétrique et de Rayleigh sont soumises à un amortissement de caractère identique à celui des ondes élémentaires longitudinales et transversales qui les composent. Cet amortissement peut se définir par un coefficient δ qui dépend :

- du milieu élastique utilisé, à savoir de ses propriétés élastiques, de sa structure, de son usinage, de son état de surface ;
- de la fréquence de l'onde, la variation semblant linéaire ;
- de l'épaisseur D de la plaque ; la variation semble liée ici à l'importance relative des mouvements élémentaires de compression et de cisaillement, qui présentent eux-mêmes des amortissements différents. Le mouvement devenant principalement transversal lorsque D devient petit, on peut supposer que l'amortissement ira en croissant.



a - Caractère et amortissement du 1er mode asymétrique en fonction de la fréquence (d'après Meitzler)



b - Amortissement des ondes de Lamb de différents modes dans une plaque immergée dans l'eau (d'après Worlton).

Figure 24 - Amortissement des ondes de Lamb.

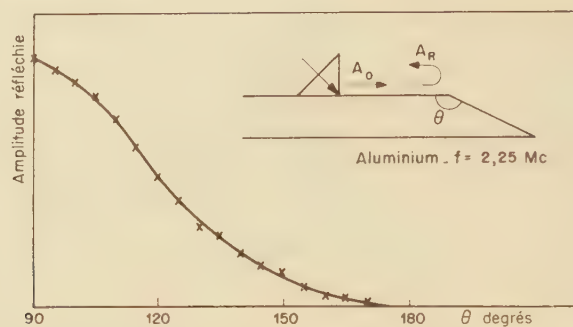
8 - RÉFLEXION

La plupart des expérimentateurs se sont plus particulièrement penchés sur la réflexion des ondes de Rayleigh et de Lamb par de petites discontinuités de surface [13] [19] [22], le but pratique étant précisément la détection de ces défauts. Les signaux réfléchis par divers sillons de diverses formes (section carrée, circulaire, triangulaire) et de diverses profondeurs ont ainsi été étudiés.

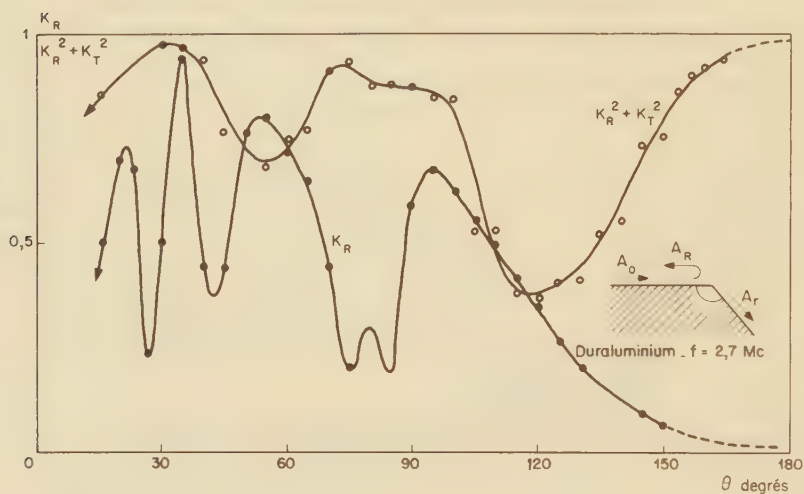
Lorsque ces défauts sont de très petites dimensions et en très grand nombre, ils provoquent une dispersion des ondes c'est-à-dire un phénomène d'amortissement.

Mais ce qui nous intéresse ici est la réflexion des ondes par une limite plane du milieu élastique formant un angle θ avec la ou les surfaces de celui-ci (figure 25a).

En ce qui concerne les ondes de Lamb, nous ne connaissons pas de travaux se rapportant à ce problème ; par contre, pour les ondes de Rayleigh, on dispose de quelques résultats et notamment ceux de Viktorov [26] et Binczewski [22].



a - Ondes de Rayleigh : réflexion sur une arête d'angle θ (d'après Binczewski).



b - Ondes de Rayleigh : coefficients de réflexion et de transmission sur une arête d'angle θ (d'après Victorov)

Figure 25 - Réflexion des ondes de Rayleigh.

a - Résultats de Binczewski [22]

Le milieu utilisé était une épaisse plaque d'aluminium terminée par un biseau faisant avec l'une des faces un angle θ variant entre 0 et 90°. L'émetteur-récepteur d'ondes fut placé à 90 centimètres du bord, successivement sur l'une et l'autre face, ce qui équivaut finalement à une variation de θ de 0 à 180 degrés. La figure 25a donne la courbe de réponse pour θ entre 0 et 90°. La référence ne fournit pas la courbe pour θ entre 90° et 180° mais, d'après le texte, elle serait du même type, l'amplitude réfléchie continuant à croître lorsque θ croît de 90° à 180°, tout au moins jusqu'aux environs de 165°.

Les essais ont en outre mis en évidence l'influence de l'acuité de l'arête ; son arrondissement entraîne une diminution notable de l'amplitude réfléchie, les ondes de Rayleigh contournant facilement les bords arrondis.

b - Résultats de Viktorov [26]

Le milieu d'essai est ici constitué par un bloc de duralumin limité par deux faces planes formant une arête d'angle θ (figure 25b). Une impulsion de fréquence 2,7 Mc est émise sur l'une des faces perpendiculairement à l'arête. On mesure l'amplitude du signal réfléchi par celle-ci et l'amplitude du signal transmis sur l'autre face.

Viktorov a tracé les courbes donnant les coefficients K_R et K_T de réflexion et de transmission, calculés à partir de ces amplitudes ainsi que la somme $K_R^2 + K_T^2$ correspondant à l'énergie totale des ondes transmises et réfléchies (figure 25b). Des courbes qualitativement identiques ont été obtenues dans le cas de l'acier.

On peut donc penser que tous les milieux élastiques donneront des résultats semblables qui sont les suivants :

- K_R et K_T passent par une série de maximums et de minimums, le maximum de l'un correspondant en général au minimum de l'autre et vice et versa.
- Lorsque θ tend vers 180° , K_R tend vers 0 et K_T vers 1.
- K_R^2 et K_T^2 n'atteignent jamais la valeur 1.
- $K_R^2 + K_T^2$ est toujours inférieur à 1, ce qui laisse supposer la transformation d'une partie de l'onde incidente en ondes longitudinales et transversales se propageant vers l'intérieur du milieu ; ceci s'explique par le fait que la superposition des ondes de Rayleigh incidentes, réfléchies et transmises ne permet pas de remplir les conditions de contraintes nulles sur les faces.

Viktorov a également étudié l'influence de l'acuité de l'arête en la remplaçant par un arrondi de rayon r variable et en étudiant K_R , K_T et $K_R^2 + K_T^2$ en fonction de celui-ci pour un angle θ constant égal à 90° . Ces divers coefficients présentent une variation oscillante mais lorsque $r \rightarrow 0$ on retrouve à peu près les résultats obtenus ci-dessus pour $\theta = 90^\circ$ et lorsque r devient grand K_R , K_T tendent respectivement vers 0 et 1, ce qui montre la facilité avec laquelle les ondes de Rayleigh contournent les angles pour peu qu'ils soient suffisamment arrondis ($r/\lambda > 1,5$).

Les deux résultats ci-dessus ne sont pas concordants ; Binczewski a obtenu une variation beaucoup plus monotone de l'amplitude réfléchie en fonction de θ ; malheureusement, l'auteur n'a pas exprimé les résultats en terme de coefficient de réflexion (en rapportant l'amplitude réfléchie à l'amplitude incidente).

La réflexion des ondes de Rayleigh semble donc constituer un phénomène assez complexe et son étude est à poursuivre ; quant aux ondes de Lamb, le problème demeure entier.

Chapitre VII

DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL CALCUL DU CHAMP DEVANT L'ÉMETTEUR

PRINCIPALES NOTATIONS PROPRES AU CHAPITRE VII

- u : vitesse de vibration de la face avant de l'émetteur
 $2a, 2b$: longueur et largeur de l'émetteur
 ds : élément d'aire
 S : surface totale de l'émetteur
 d_1 : distance du point P à la surface de l'émetteur
 r : distance du point P au centre de l'élément ds
 r_1 : distance de la projection de P au centre de l'élément ds
 x, y : abscisse, ordonnée du point P
 P : amplitude de pression
 P_0 : pression de référence = $\rho fu\Delta$
 φ : phase

1 - GÉNÉRALITÉS

a - Introduction

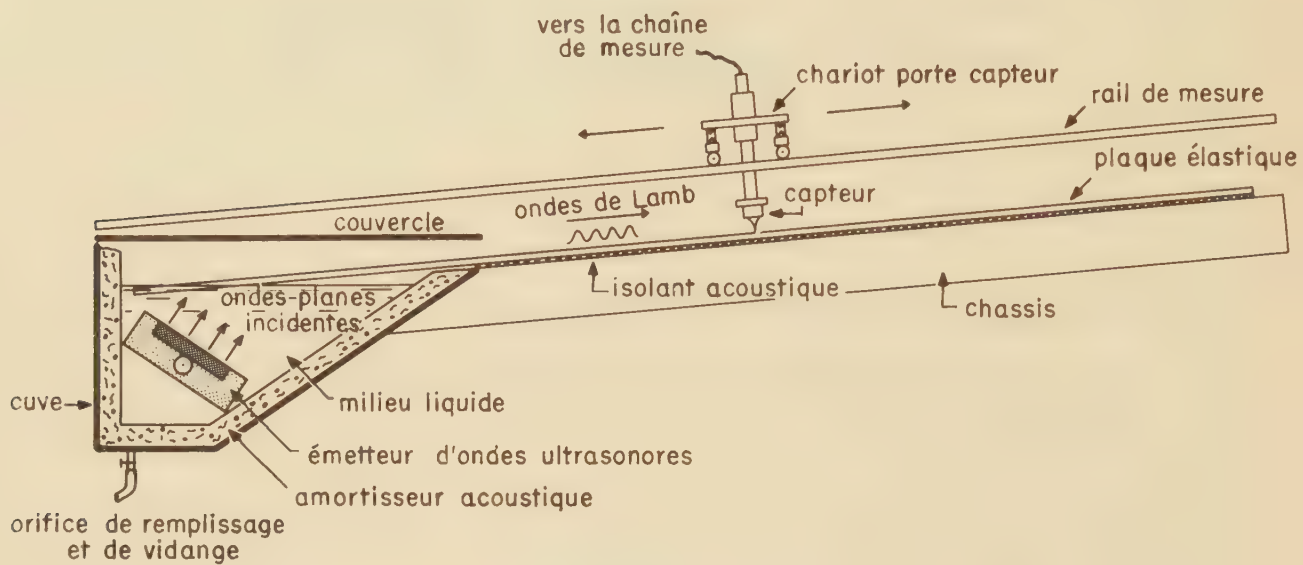
Le but du dispositif expérimental était double. D'une part, il s'agissait de vérifier la possibilité de produire un faisceau plan d'ondes de Lamb du premier mode asymétrique ayant un front de grande largeur (30 centimètres) et ce en ondes sinusoïdales continues ; la majorité des expérimentateurs ayant étudié ce type d'ondes élastiques ont en effet utilisé des impulsions ce qui élimine tous les phénomènes d'onde stationnaire.

D'autre part, on désirait vérifier expérimentalement les lois théoriques de propagation des ondes de Lamb 1er mode asymétrique en se limitant à celles régissant la réfraction. C'est-à-dire que nous voulions mesurer essentiellement :

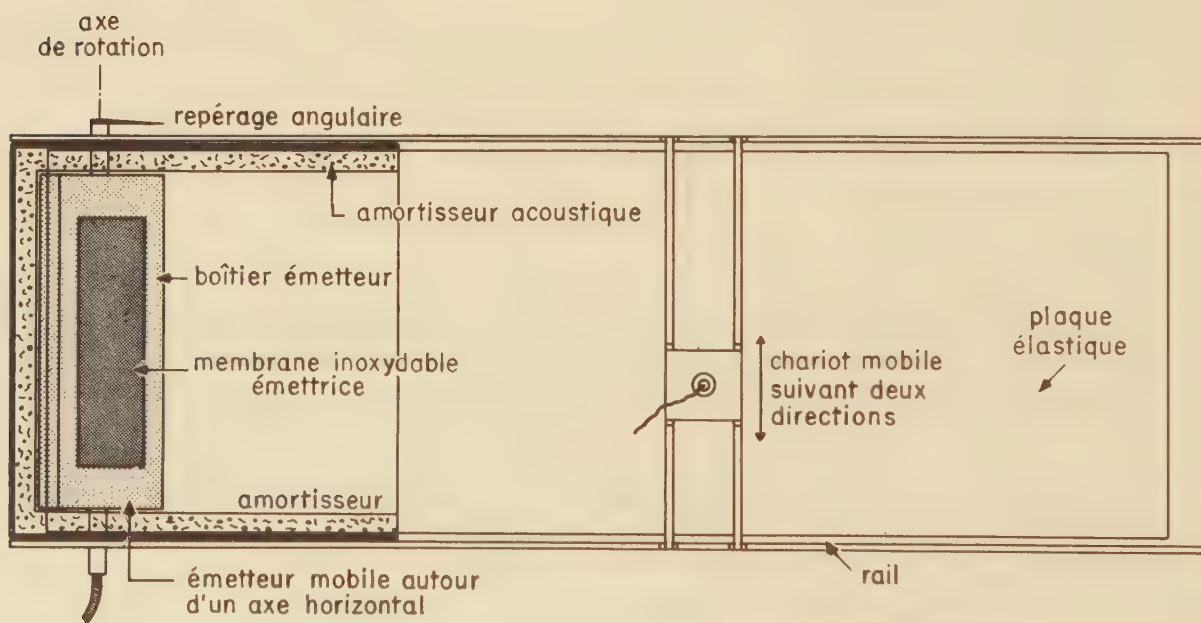
- l'amortissement des ondes dans le milieu élastique,
- la vitesse de phase (par l'intermédiaire de la longueur d'onde),
- la variation de vitesse de phase et de l'amplitude en fonction de l'épaisseur de la plaque.

Le but final était de réaliser un "plan de vagues" sur une plaque simulant des fonds marins naturels.

Le dispositif expérimental décrit ci-après est celui qui nous a permis d'obtenir des résultats satisfaisants ; s'il correspond au projet initial dans sa conception générale, par



Coupe en élévation



Vue en plan

Figure 26 - Schéma d'ensemble de l'installation expérimentale

contre, il en diffère dans sa réalisation par suite des difficultés rencontrées au cours de sa mise en oeuvre. Nous parlerons de ces difficultés et de leurs causes dans le chapitre donnant les résultats expérimentaux.

b - Conception générale (figure 26, photo 1).

La méthode retenue pour produire les ondes ultrasonores de Lamb est la méthode du coin définie dans le chapitre VI. Rappelons qu'elle consiste à faire arriver sur la plaque élastique, avec un angle d'incidence donné dépendant du type d'onde désiré, dans un milieu solide ou liquide, un faisceau d'ondes ultrasonores planes.

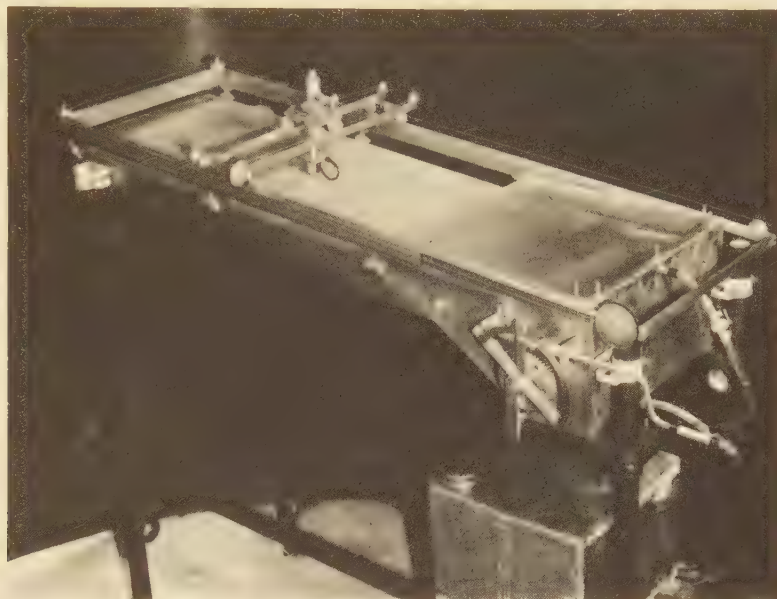


Photo 1 - Vue d'ensemble du dispositif expérimental

Dans notre cas, le milieu intermédiaire était liquide. Pour assurer le contact entre la plaque et le liquide, nous avons choisi de faire plonger la plaque avec un angle très faible dans une cuve remplie de liquide et contenant l'émetteur d'ondes ultrasonores.

Le dispositif expérimental est donc constitué des éléments suivants :

- un châssis en cadre rectangulaire incliné de 5 degrés par rapport à l'horizontale,
- une cuve, solidaire du châssis, contenant, immergé dans un liquide, l'émetteur d'ondes ultrasonores mobile autour d'un axe horizontal,
- une plaque, milieu élastique support des ondes étudiées, reposant sur le châssis et plongeant dans la cuve,
- un capteur monté sur un chariot mobile permettant une mesure de l'onde en tout point de la plaque,
- une chaîne de mesure destinée à analyser le signal recueilli par le capteur,
- un générateur haute-fréquence alimentant l'émetteur ultrasonore.

2 - CALCUL DU CHAMP DEVANT L'ÉMETTEUR

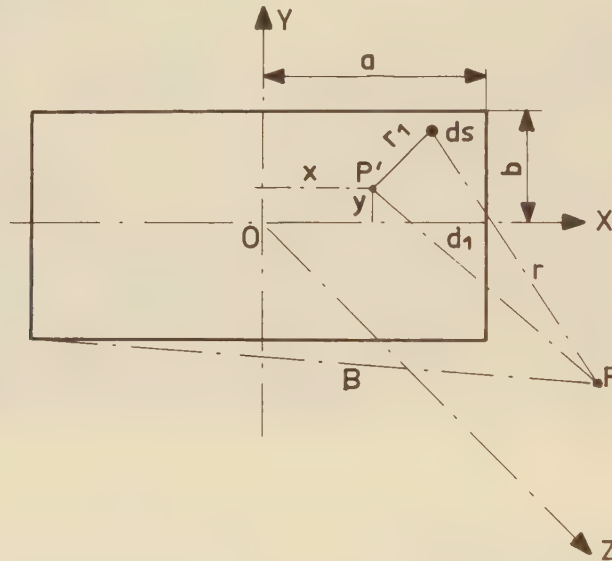
a - Généralités

Le but du présent calcul est de déterminer, en un point quelconque de l'espace, le champ produit par un émetteur plan à surface rectangulaire, le milieu environnant étant liquide. Le champ est défini par l'amplitude de variation de pression et la phase par rapport à l'émetteur.

Le résultat permettra de vérifier que le champ produit peut être considéré comme une onde plane, c'est-à-dire que la phase et l'amplitude restent pratiquement constantes dans un plan parallèle à l'émetteur.

La face avant du transducteur émetteur est supposée vibrer en piston, c'est-à-dire que tous les points qui la composent se déplacent en phase avec la même amplitude ; nous faisons en outre l'hypothèse que cette vibration est périodique dans le temps et sinusoïdale. Enfin, l'émetteur est disposé dans un baffle infini.

b - Théorie



La variation de pression, en un point P, due à la source élémentaire ds est donnée en écriture complexe par :

$$dp_1 = -i \frac{A ds}{r} e^{ik(r-ct)} \quad \text{avec} \quad A = \rho f u$$

En omettant le facteur temporel, l'amplitude correspondante est :

$$dp = -i \frac{A ds}{r} e^{ikr}$$

En rapportant toutes les longueurs à la longueur d'onde Λ , tout en conservant les mêmes notations, on trouve :

$$dp = -i \frac{A \Lambda ds}{r} e^{2\pi i r}$$

L'amplitude de pression due à l'ensemble de l'émetteur s'obtient en intégrant cette expression sur toute la surface du transducteur. On obtient ainsi :

$$P_1 = \iint_s dp = -i A \Lambda \iint_s \frac{e^{2\pi i r}}{r} ds$$

En scindant en deux termes l'exponentielle et en rapportant P_1 à une pression de référence P_0 , on aboutit à :

$$P = P_1 / P_0 = -i \iint_s \frac{\cos 2\pi r}{r} ds + \iint_s \frac{\sin 2\pi r}{r} ds$$

En prenant le module et l'argument de l'amplitude complexe, on obtient l'amplitude et la phase :

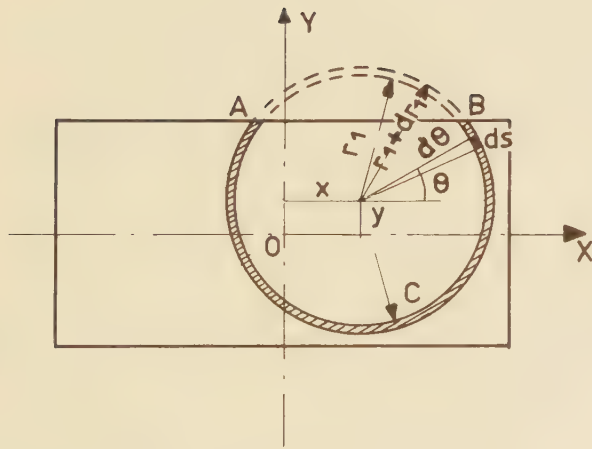
$$\text{Pour l'amplitude : } P = \sqrt{(R^2 + S^2)}$$

$$\text{Pour la phase : } \varphi = \text{arctg } \frac{R}{S}$$

avec :

$$R = - \iint_s \frac{\cos 2\pi r}{r} ds$$

$$S = \iint_s \frac{\sin 2\pi r}{r} ds$$



c - Calcul numérique

c1) Pour calculer les quantités R et S , associons les éléments de la surface de l'émetteur donnant des ondes élémentaires en phase et de même amplitude. Pour cela, nous considérons les points situés entre deux sphères de centre P et de rayons peu différents r et $r + dr$. Ces points forment sur la surface du transducteur une portion de couronne C comprise entre deux cercles de rayons r_1 et $r_1 + dr_1$ et intérieure au rectangle.

En prenant comme élément d'aire ds un élément de cette portion de couronne

compris entre deux rayons faisant avec l'axe Ox des angles θ et $\theta + d\theta$, on trouve :

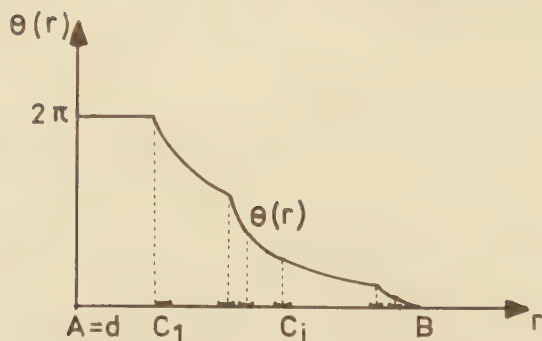
$$ds = r_1 dr_1 d\theta \quad \text{avec} \quad r_1^2 = r^2 - d_1^2 \quad \text{soit} \quad r_1 dr_1 = r dr$$

$$ds = r dr d\theta \quad R = - \int_A^B \cos 2\pi r dr \int_C^C d\theta = \int_A^B \theta(r) \cos 2\pi r dr$$

$$\text{et} \quad S = \int_A^B \theta(r) \sin 2\pi r dr \quad \text{avec} \quad \theta(r) = \int_C^C d\theta$$

B étant la distance de P au coin de l'émetteur le plus éloigné et A la distance de P à l'émetteur ($A = d_1$).

La variation de $\theta(r)$ en fonction de r est représentée schématiquement sur la figure ci-après.



La courbe présente un certain nombre de ruptures de pente qui correspondent aux valeurs particulières C_i de r donnant une couronne tangente à l'un des côtés du rectangle ou passant par l'un des sommets. Pour les valeurs de r inférieures à C_1 qui correspond à la plus grande couronne entièrement contenue dans le rectangle, θ est constant et égal à 2π .

c2) Pour réaliser l'intégration numérique, nous avons divisé l'intervalle AB de variation de r en un certain nombre de petits intervalles qui sont de quatre types différents, à savoir :

α) L'intervalle $[A - C_1]$ sur lequel nous intégrons algébriquement ;

β) Des intervalles de longueur 0,25 encadrant les ruptures de pente sur lesquels nous intégrons numériquement par la méthode des trapèzes avec un pas de 0,025. Les bornes de ces intervalles sont obtenues en arrondissant inférieurement et supérieurement à 0,25 près les valeurs particulières de r ;

γ) Deux intervalles particuliers ayant pour bornes d'une part C_1 et B, d'autre part, A et B arrondis à 0,25 près respectivement supérieurement et inférieurement ; nous y intégrons par la méthode des trapèzes avec un pas voisin de 0,025 donnant un nombre entier de sous-intervalles ;

δ) Des intervalles de longueur 0,25 compléments des précédents dans $[A, B]$ sur lesquels nous intégrons algébriquement en supposant la variation de $\theta(r)$ linéaire dans l'intervalle, qui correspond à une demi-arche de sinusofde.

Le calcul de R et S nous amène ainsi à calculer trois termes ; R s'écrit en effet :

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = -2\pi \int_A^{C_1} \cos 2\pi r \, dr - \sum \theta(r) \cos 2\pi r \, dr - \sum_{n/4}^{(n+1)/4} \theta(r) \cos 2\pi r \, dr$$

n étant un nombre entier.

S s'écrit sous la forme d'une expression identique en sinus.

c3) Calcul des trois termes

α) Calcul de R_1 et S_1 sur l'intervalle α .

L'intégration algébrique donne immédiatement :

$$R = \sin 2\pi A - \sin 2\pi C_1 \quad \text{et} \quad S = \cos 2\pi A - \cos 2\pi C_1$$

β) Calcul de R_2 et S_2 sur les intervalles β et γ .

L'intégration numérique se fait par la méthode simple des trapèzes classiquement utilisée.

γ) Calcul de R_3 et S_3 sur les intervalles δ .

Nous supposons que $\theta(r)$ est une fonction linéaire de r dans chacun des intervalles δ , c'est-à-dire que :

$$\theta(r) = ar + b \quad \text{avec} \quad a = 4(y_1 - y_0) \quad \text{et} \quad b = y_0(1 + n) - ny_1$$

y_0 et y_1 étant les valeurs de θ aux bornes de l'intervalle, c'est-à-dire respectivement pour $r = n/4$ et $r = (n+1)/4$.

Le problème se ramène donc au calcul de :

$$R = - \int_{n/4}^{(n+1)/4} (ar + b) \cos 2\pi r \, dr \quad \text{et} \quad S = \int_{n/4}^{(n+1)/4} (ar + b) \sin 2\pi r \, dr$$

En intégrant par parties et en utilisant les notations :

$$\cos = \cos 2\pi n/4 \quad \cos_* = \cos 2\pi(n+1)/4$$

$$\sin = \sin 2\pi n/4 \quad \sin_* = \sin 2\pi(n+1)/4$$

On trouve :

$$R = - \frac{an + 4b}{8\pi} (\sin_* - \sin) - \frac{a}{8\pi} \sin_* - \frac{a}{\pi^2} (\cos_* - \cos)$$

$$S = - \frac{an + 4b}{8\pi} (\cos_* - \cos) - \frac{a}{8\pi} \cos_* + \frac{a}{\pi^2} (\sin_* - \sin)$$

En remplaçant a et b par leurs valeurs en fonction de y_0 et y_1 , compte tenu de ce que $\cos_* = -\sin$ et $\sin_* = \cos$, on trouve en groupant les termes en y_0 et y_1 :

$$R = \frac{y_0}{2\pi} \sin - \frac{y_0}{\pi^2} (\cos + \sin) - \frac{y_1}{2\pi} \sin_* - \frac{y_1}{\pi^2} (\cos_* - \sin_*)$$

$$S = \frac{y_0}{2\pi} \cos - \frac{y_0}{\pi^2} (\cos - \sin) - \frac{y_1}{2\pi} \cos_* + \frac{y_1}{\pi^2} (\sin_* + \cos_*)$$

En faisant la somme des intégrales sur deux intervalles adjacents :

$$[(r = n/4, \theta = y_0), \quad (r = (n+1)/4, \theta = y_1)]$$

et

$$[(r = (n+1)/4, \theta = y_1), \quad (r = (n+2)/4, \theta = y_2)]$$

on trouve que le terme en y correspondant à la borne commune se réduit à :

$$- \frac{2y_1}{\pi^2} \cos_* \text{ pour } R$$

et

$$\frac{2y_1}{\pi^2} \sin_* \text{ pour } S$$

En sommant sur $n+1$ intervalles successifs définis par :

$$r = [r_0 \dots r_1 \dots r_n] \quad \theta = [y_0 \dots y_1 \dots y_n]$$

on trouve :

$$R = \frac{1}{\pi^2} \left[-y_0 \cos 2\pi r_0 + y_0 \left(\frac{\pi-2}{2} \right) \sin 2\pi r_0 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \cos 2\pi r_i - y_n \cos 2\pi r_n - y_n \left(\frac{\pi-2}{2} \right) \sin 2\pi r_n \right]$$

$$S = \frac{1}{\pi^2} \left[y_0 \sin 2\pi r_0 + y_0 \left(\frac{\pi-2}{2} \right) \cos 2\pi r_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \sin 2\pi r_i + y_n \sin 2\pi r_n - y_n \left(\frac{\pi-2}{2} \right) \cos 2\pi r_n \right]$$

Nous ferons progresser r avec un pas de 0,25 en calculant pour chaque valeur le terme de R et S relatif au $y = \theta(r)$ correspondant. R et S peuvent alors s'écrire :

$$R = \sum_{i=0}^n -\frac{\theta(r_i)}{\pi^2} \left[U_0 \cos 2\pi r_i + U_1 \left(\frac{\pi-2}{2} \right) \sin 2\pi r_i \right]$$

$$S = \sum_{i=0}^n \frac{\theta(r_i)}{\pi^2} \left[U_0 \sin 2\pi r_i - U_1 \left(\frac{\pi-2}{2} \right) \cos 2\pi r_i \right]$$

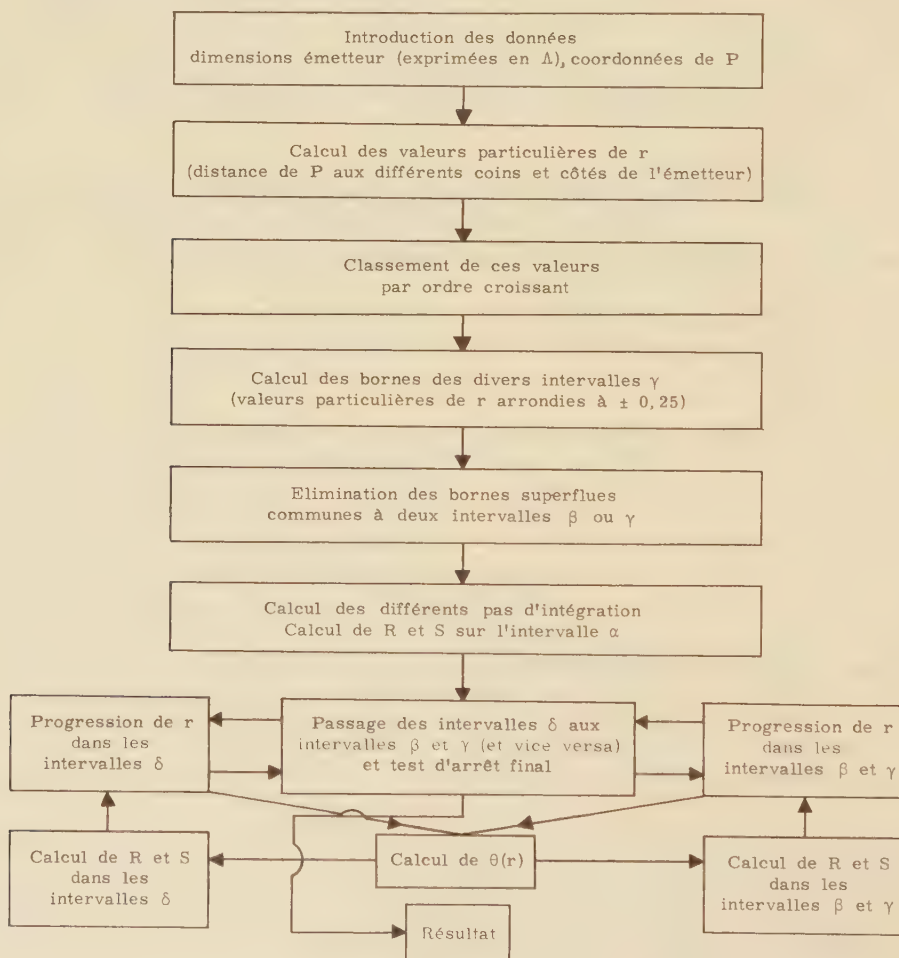
avec :

$$\begin{cases} i = 0 \Rightarrow U_0 = 1 & U_1 = -1 \\ i = i \Rightarrow U_0 = 2 & U_1 = 0 \\ i = n \Rightarrow U_0 = 1 & U_1 = 1 \end{cases}$$

c4) Programme de calcul

Le calcul numérique a fait l'objet d'un programme testé sur calculateur électronique CAB 500 et, après traduction, exploité sur ordinateur IBM 7090.

Le programme a été établi suivant le schéma ci-dessous :



d - Résultats

Le calcul a été effectué pour un émetteur rectangulaire de dimensions 68 et 23 longueurs d'ondes.

A la fréquence de 210 kHz, ces dimensions correspondent à un émetteur de 30 cm $\times$ 10 cm émettant dans du tétrachlorure de carbone ($c = 920$ m/s, $\Lambda = 0,438$ cm). Dans l'eau ($c = 1430$ m/s, $\Lambda = 0,68$ cm), elles correspondent à un émetteur de dimensions 46 cm $\times$ 16 cm.

Les caractéristiques du champ ont été calculées dans une zone rectangulaire de mêmes dimensions que l'émetteur, située dans un plan parallèle à l'émetteur à une distance de 28 longueurs d'onde (12 cm dans le tétrachlorure, 19 cm dans l'eau). Cette distance correspond sensiblement à celle séparant l'émetteur de la surface de la plaque dans la zone d'attaque de l'onde incidente.

Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 27 et 28 en ce qui concerne respectivement la phase et l'amplitude. Ces figures donnent les résultats pour un quart de la zone considérée, les autres quarts se déduisant par symétrie par rapport aux deux

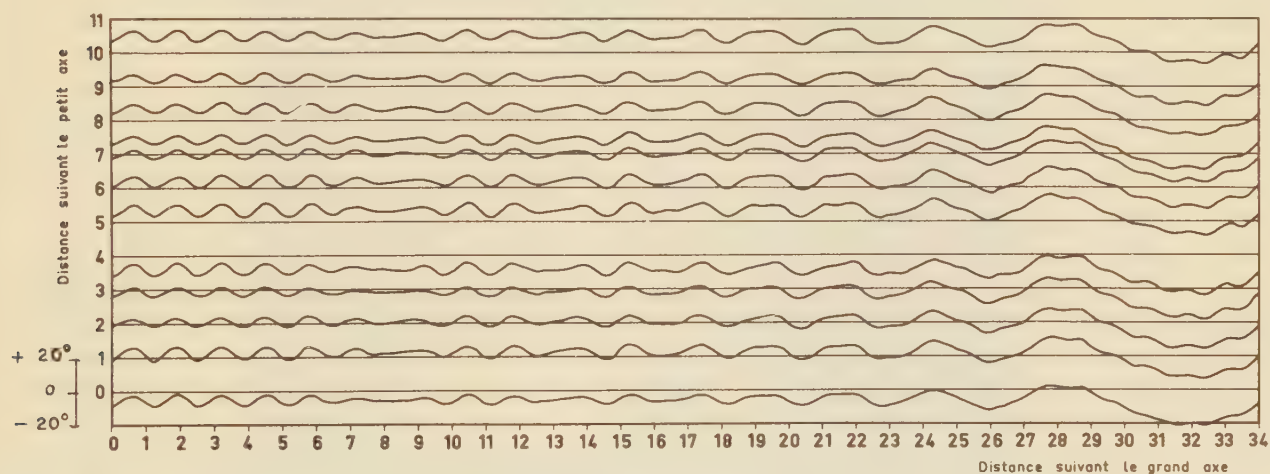


Figure 27 - Champ devant un émetteur rectangulaire. Courbes de variation de phase le long de parallèles au grand axe. Dimensions de l'émetteur : 68 $\times$ 23 longueurs d'onde. Distance à l'émetteur : 28 longueurs d'onde.

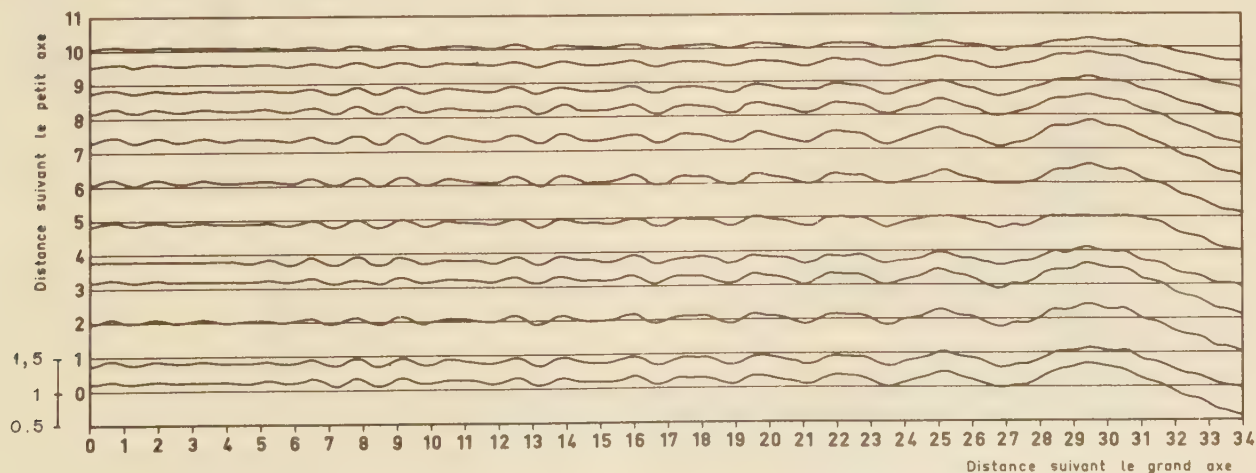


Figure 28 - Champ devant un émetteur rectangulaire. Courbes de variation d'amplitude le long de parallèles au grand axe. Dimensions de l'émetteur : 68 $\times$ 23 longueurs d'onde. Distance à l'émetteur : 28 longueurs d'onde.

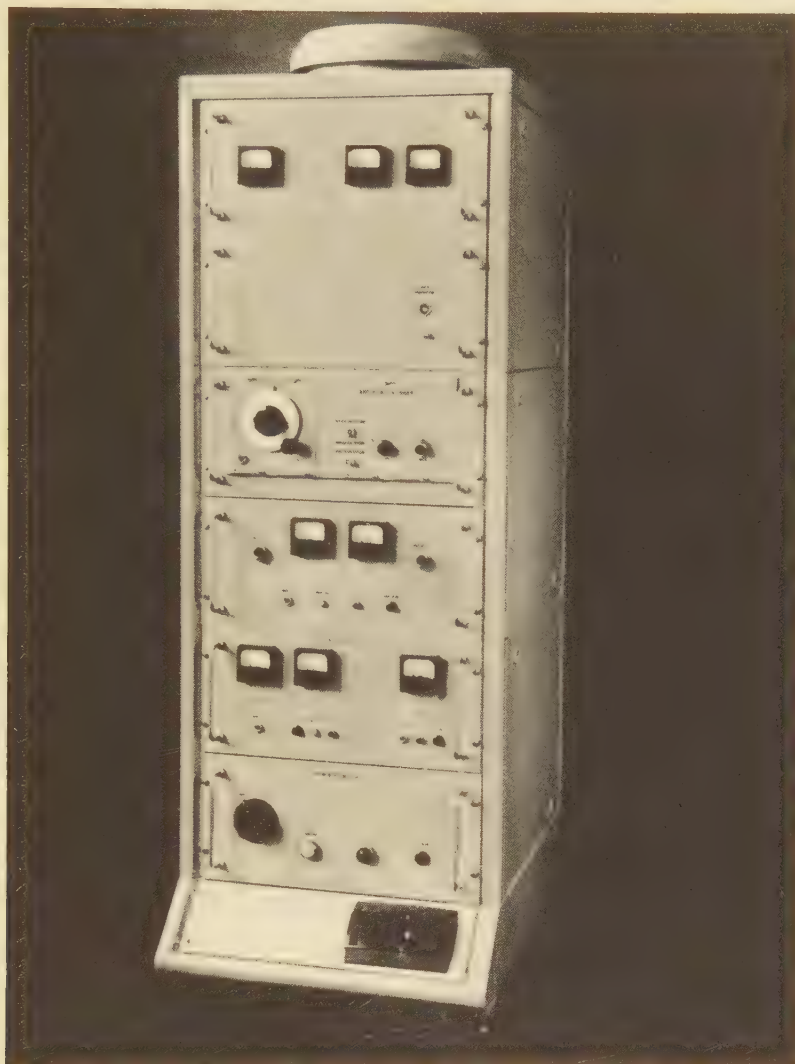


Photo 2 - Le générateur Haute-Fréquence

- un oscillateur du type Hartley dont la fréquence peut être réglée de 200 à 220 kHz environ,
- un amplificateur driver doté à l'entrée d'un atténuateur permettant de faire varier la puissance de sortie,
- un amplificateur de puissance,
- les diverses alimentations nécessaires au fonctionnement des sous-ensembles précédents.

β) L'émetteur (figure 30)

La source ultrasonore est constituée par un ensemble de 12 céramiques piézo-électriques au titanate de baryum à faces métallisées de dimensions 47 x 47 mm, de

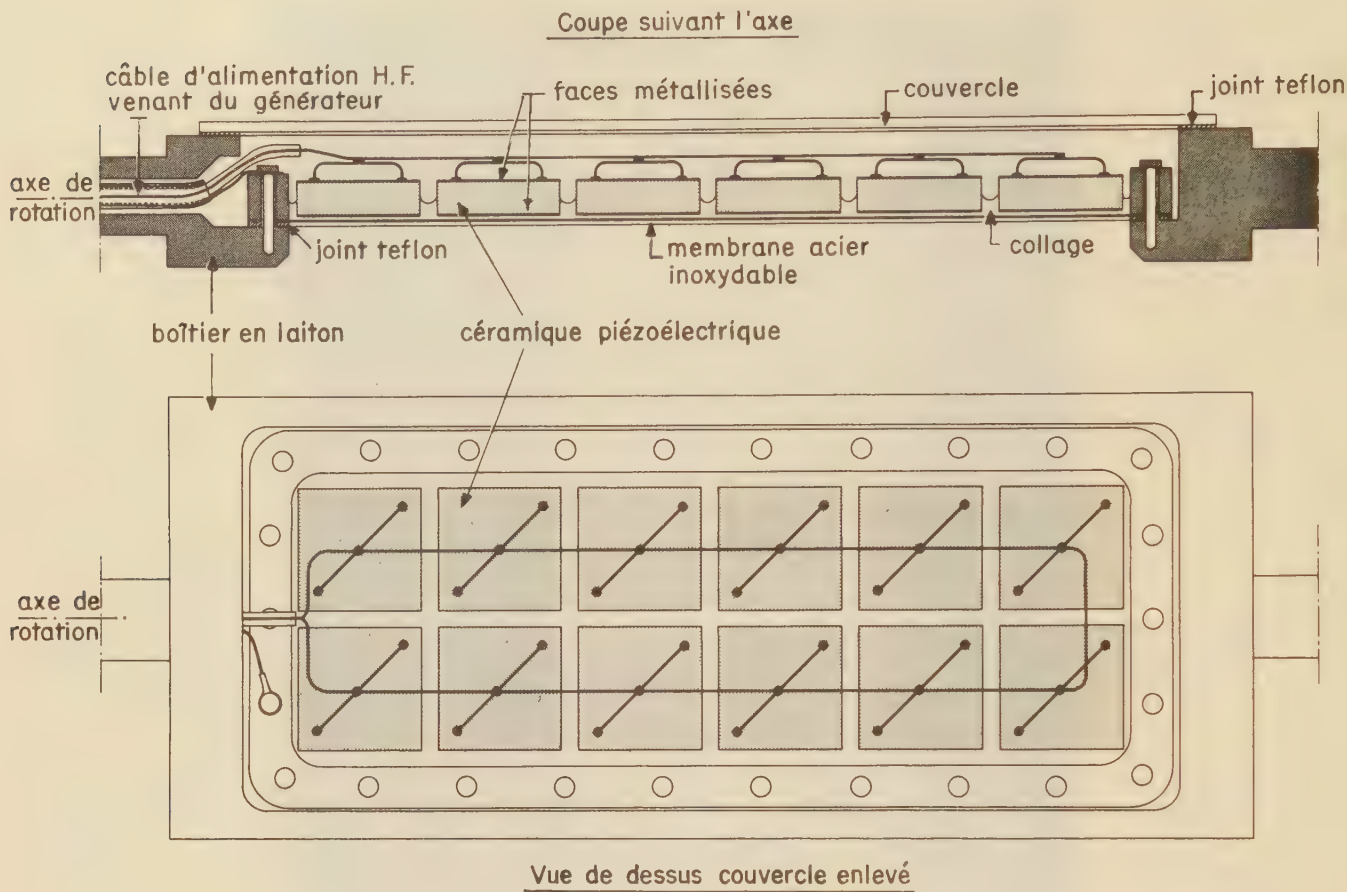


Figure 30 - Schéma de la base d'émission ultrasonore.

fréquence 210 kHz. Ces céramiques sont alimentées en parallèle en tension alternative par le générateur H.F.

Elles sont collées en mosaïque sur une membrane en métal inoxyable de 318 x 112 mm, qui en vibrant sensiblement en piston constitue la source d'ondes planes. L'ensemble est monté dans un boîtier métallique étanche de forme parallélipédique dont la membrane inoxyable forme une des faces.

L'étanchéité est assurée par des joints au Teflon. Le boîtier est muni, en ses extrémités, de manchons servant d'axe de rotation et dont l'un laisse passer le câble d'alimentation haute fréquence.

L'ensemble émetteur ainsi constitué a les caractéristiques suivantes :

- fréquence : 210 kHz,
- tension aux bornes : 250 à 300 volts,
- capacité : 18 000 pF.
- puissance électrique maximale : 600 watts.

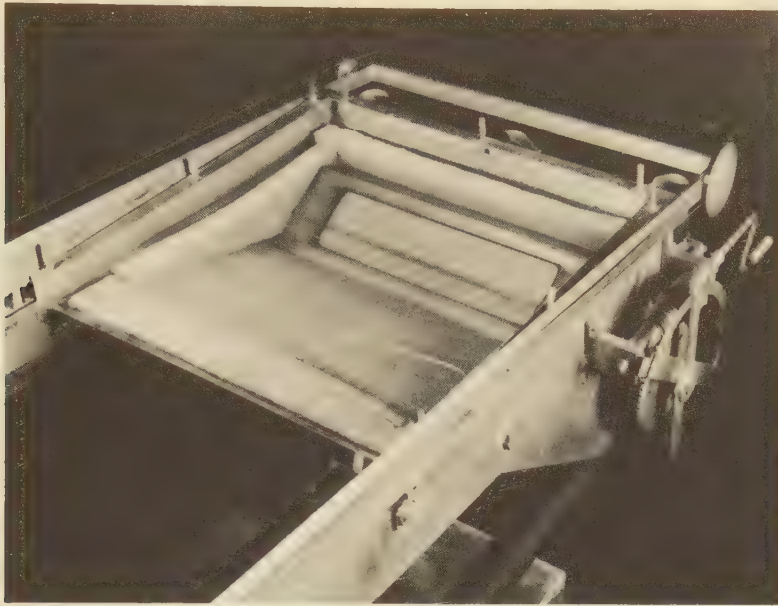


Photo 3 - La cuve et l'émetteur

γ) La cuve (figure 26, photo 3)

L'ensemble émetteur est immergé dans un liquide contenu dans une cuve en laiton à section quasi-triangulaire. L'émetteur peut pivoter autour de son axe qui sort de la cuve par deux presse-étoupes. Cet axe de rotation est parallèle à la surface de la plaque. Une des extrémités est dotée d'un système à vis sans fin permettant une variation lente de la position angulaire et d'un système de rapporteur avec vernier permettant de mesurer l'angle d'incidence du faisceau ultrasonore avec une précision du dixième de degré.

Le milieu liquide utilisé a été constitué successivement par du tétrachlorure de carbone et de l'eau. Les parois de la cuve étaient tapissées d'amortisseurs destinés à éliminer les réflexions parasites et les ondes stationnaires. Dans le cas du tétrachlorure de carbone, nous avons utilisé de la laine de verre et, dans le cas de l'eau, de la mousse plastique.

Un couvercle permettait d'éviter l'émission de vapeurs toxiques dans le cas d'utilisation du tétrachlorure de carbone.

Dans le même but, le remplissage était assuré par siphonnage à partir d'un réservoir situé sous la cuve et mis sous pression à l'aide d'une pompe.

b - Propagation

Le milieu élastique support des ondes était constitué par une plaque de 50 cm de large, de 1 m ou 1,50 m de long et d'épaisseur variant entre 2 mm et 1 cm. Différents matériaux ont été utilisés, à savoir : plexiglas, acier doux, duralumin et laiton.

La plaque reposait sur un châssis rectangulaire, solidaire de la cuve, par l'intermédiaire d'un amortisseur constitué par une bande de liège de 2 mm d'épaisseur. Cet amortisseur était destiné à éviter le passage d'ondes ultrasonores vagabondes du châssis dans la plaque.

A son extrémité, la plaque plongeait dans le liquide de la cuve sans aucun contact mécanique avec celle-ci. Sa position par rapport à la surface du liquide était réglée de telle façon que le liquide soit en contact avec la face inférieure de la plaque sans être en contact avec la face supérieure.

Dans le cas des plaques métalliques, dans lesquelles l'amortissement des ondes ultrasonores avec la distance était négligeable, la réflexion sur l'extrémité était évitée en disposant sur les deux faces un important talus de mastic frais.

c - Réception - Mesures

La mesure des caractéristiques de l'onde, phase et amplitude, en chaque point de la plaque est assurée par un capteur mobile et une chaîne de mesure.

α) Capteur (figure 31, photo 4 et 5)

Le capteur est destiné à mesurer l'amplitude verticale du déplacement de la surface de la plaque, sur une surface réduite.

Il est constitué par un tronc de cône de révolution, à génératrice exponentielle, en aluminium pur (d'impédance acoustique intermédiaire entre le plexiglas et le titanate) dont les cercles de base ont pour diamètre 1 et 10 mm et de hauteur 15,55 mm égale à une demi-longueur d'onde à la fréquence de 210 kHz utilisée. La grande base de ce tronc de cône est collée à l'une des faces métallisées d'une pastille céramique de 2 cm de diamètre et de fréquence 210 kHz.

La deuxième face métallisée de la céramique est collée sur un disque d'acier de 7,25 mm d'épaisseur, soit un quart de longueur d'onde, dans le but que l'onde réfléchie étant en phase s'ajoute à l'onde incidente.

Le capteur est en contact avec la surface de la plaque par l'intermédiaire de la petite base du tronc de cône.

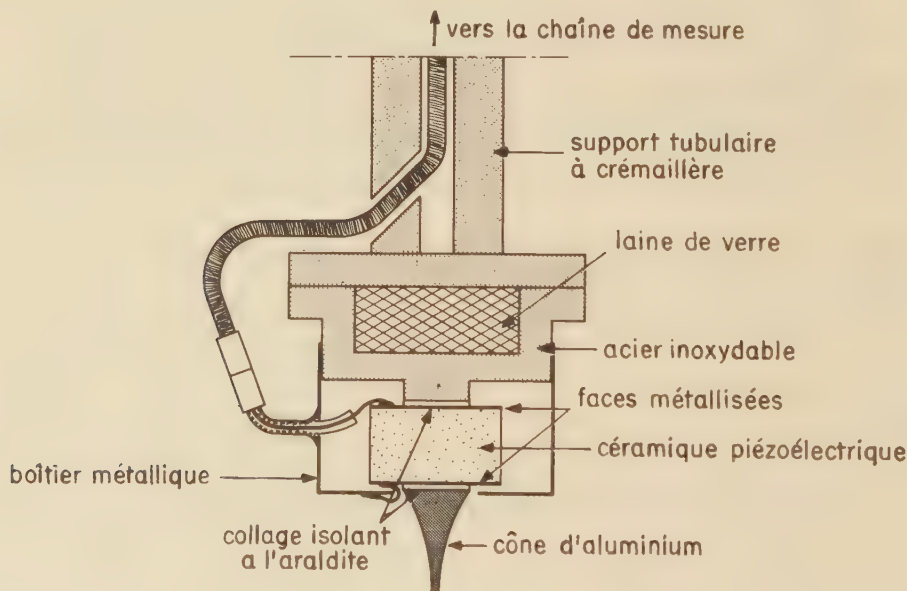
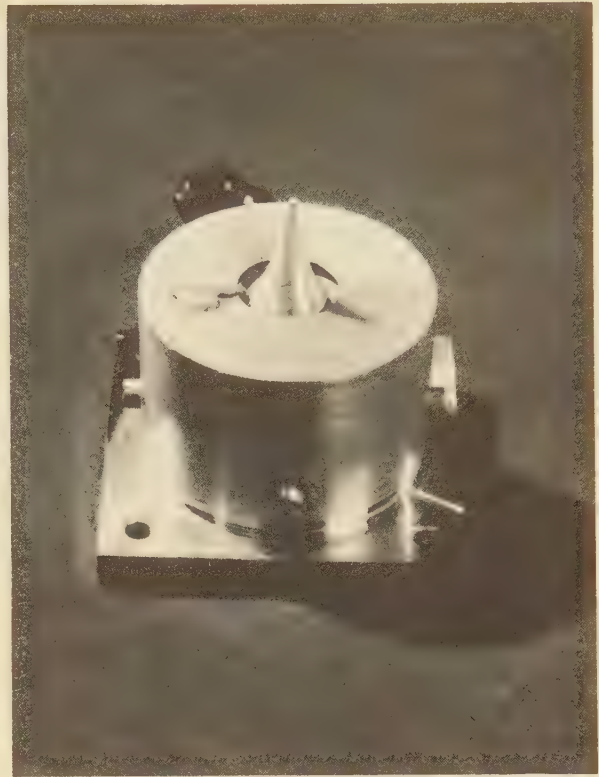
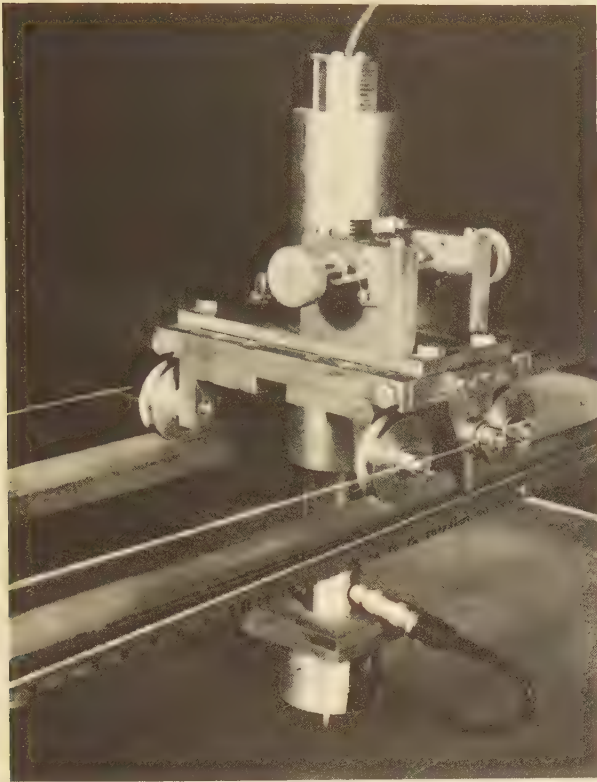


Figure 31 - Coupe du capteur de mesure.



Photos 4 et 5 - Chriot de mesure et capteur

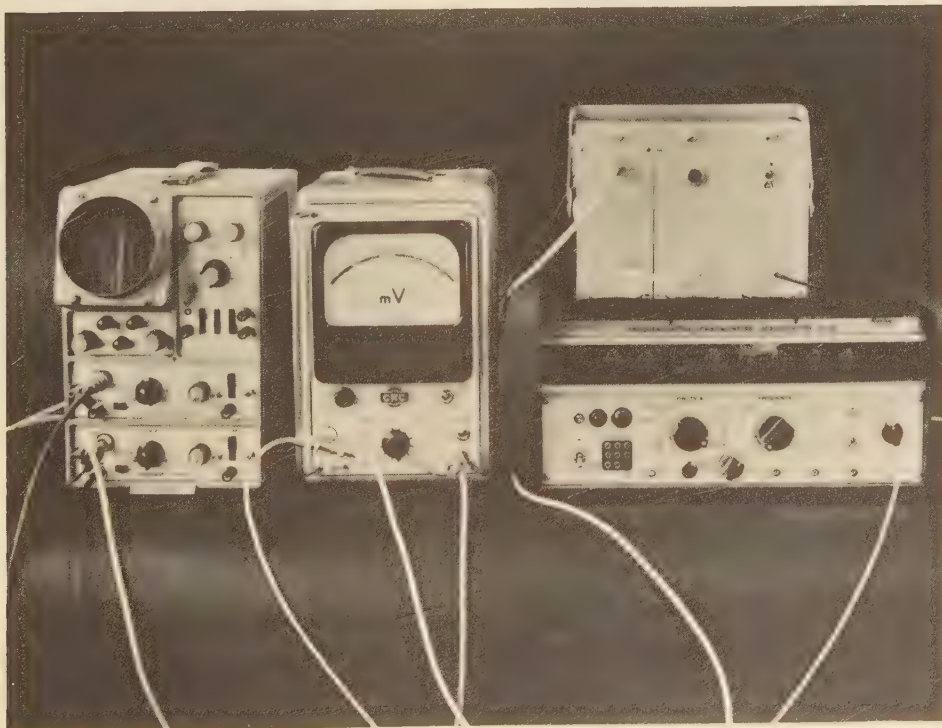


Photo 6 - Chafne de mesure

Les ondes ultrasonores longitudinales produites dans le tronc de cône sont transformées en tension électrique par la céramique piézo-électrique. C'est cette tension de fréquence 210 kHz qui est exploitée par la chaîne de mesure.

Les collages sont effectués à l'araldite et sont isolants. La face inférieure de la céramique et le boîtier métallique qui l'entoure, reliés à la masse, constituent un blindage destiné à éviter la réception des champs électriques aériens.

L'ensemble du capteur est lié à un chariot par l'intermédiaire d'un support tubulaire assurant la perpendicularité de l'axe du capteur avec la surface de la plaque. Une crémaillère permet de lever et baisser l'ensemble. Le chariot porte-capteur est mobile suivant deux directions grâce à un double système de rails, de poulies et de câbles. Les deux coordonnées X et Y du capteur suivant l'axe de la plaque et une direction perpendiculaire sont repérées au demi-millimètre près par deux index se déplaçant devant des réglets gradués fixés aux rails.

β) Chaîne de mesure (photo n° 6)

La chaîne de mesure est destinée à analyser le signal recueilli aux bornes de la céramique du capteur.

Elle se compose, dans l'ordre, des éléments suivants :

- un pré-amplificateur adapteur d'impédance ;
- un filtre passe-haut, de fréquence de coupure 65 kHz, destiné à éliminer tous les signaux parasites reçus par le capteur très sensible aux vibrations mécaniques, aux ondes sonores, etc. Le gain de l'ensemble pré-amplificateur filtre est de 8 pour les fréquences supérieures à 65 kHz ;
- un fréquencemètre à décades affichant la fréquence du signal reçu ;
- un millivoltmètre amplificateur mesurant l'amplitude moyenne du signal, de sensibilité variant entre 0,1 mV et 300 V ;
- un oscillographe cathodique à deux voies permettant de visualiser le signal de sortie du générateur, le signal reçu par le capteur (photo 7) et le déphasage entre les deux.

Ce déphasage était mesuré en appliquant le signal de sortie du générateur aux plaques horizontales et le signal du capteur aux plaques verticales :

- pour un déphasage quelconque, on obtenait une ellipse (photo 8),
- pour un déphasage égal à 2π , on obtenait une droite à 45 degrés (photo 9),
- pour un déphasage égal à $\pi + 2\pi$, on obtenait une droite à 135 degrés.

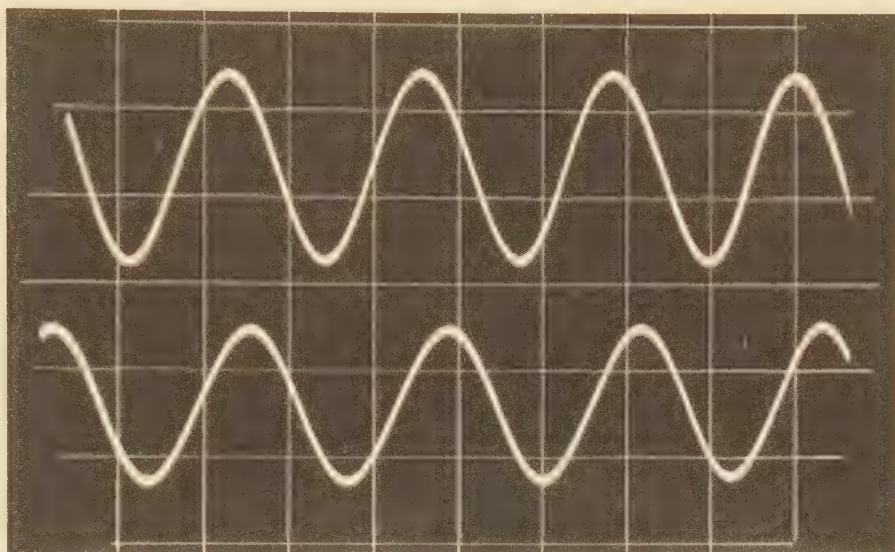


Photo 7. - Signal de sortie du générateur H.F. (en haut)
et signal de sortie du capteur (en bas)

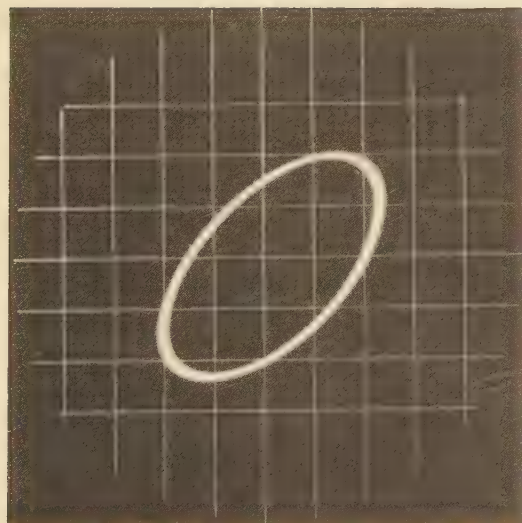


Photo 8
Ellipse ($\phi \neq 0, \pi$)

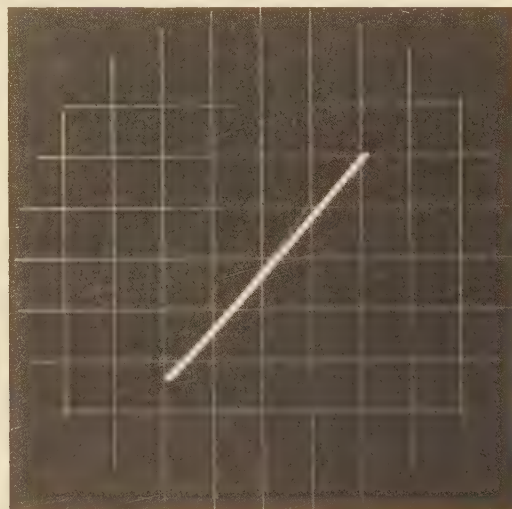


Photo 9
Droite ($\phi = 0$)

Chapitre VIII

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

1 - ÉTUDE DU DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Cette première partie a demandé de nombreuses manipulations accompagnées de modifications successives du dispositif expérimental.

Nous ne donnons ci-après qu'un résumé des étapes successives de mise au point des différents éléments constitutifs de l'installation et des difficultés rencontrées.

a - Générateur H. F

Nous avons utilisé successivement deux générateurs H.F. Le premier, réalisé par une entreprise privée, a été abandonné pour les raisons suivantes :

- le circuit oscillant et l'étage de puissance ne faisaient qu'un ;
- le réglage de la fréquence, réalisé au moyen d'une self variable de conception mécanique sommaire, était donc peu précis. En outre, la fréquence n'était pas stable au cours du temps ;
- cette variation de fréquence, modifiant l'accord avec l'émetteur, entraînait une variation de la puissance ultrasonore émise en fonction du temps, rendant toute mesure précise impossible.

Enfin la puissance de sortie était trop élevée et réglable de façon discontinue (250 W, 500 W, 750 W, 1 kW).

Le deuxième générateur (cf. description dispositif expérimental) réalisé par le Service des Mesures du Service ERNUTH été conçu suivant un schéma différent.

Un oscillateur délivre un signal de bas niveau, de fréquence stable, et réglable avec précision dans une gamme restreinte (200 à 220 kHz). Ce signal est ensuite amplifié par deux étages dont l'un permet de faire varier la puissance de sortie entre 0 et 500 W de façon continue à l'aide d'un commutateur et d'un vernier.

Ce générateur nous a donné toute satisfaction.

b - Emetteur piézo-électrique

Nous avons également utilisé deux émetteurs successifs. Le premier, de 300 x 100 mm, réalisé par le même constructeur que le générateur H.F., était constitué de 6 céramiques piézo-électriques montées en mosaïque par un collage araldite. Les faces métallisées avant formaient une des faces du boîtier émetteur et étaient directement en contact avec le milieu liquide.

Le champ produit par cet émetteur était loin d'être uniforme au point de vue amplitude.

Chaque céramique ne vibrant pas en piston, l'amplitude émise était maximale en son centre et minimale sur les bords. En outre, la puissance émise variait considérablement d'une céramique à l'autre, la raison étant vraisemblablement la non identité des fréquences de résonance.

Le deuxième émetteur, de surface 318×108 mm (cf. description dispositif expérimental) comportait 12 céramiques, toujours montées en mosaïque, mais collées sur une membrane inoxydable formant tympan d'émission et destinée à répartir l'amplitude. C'est cette membrane qui formait une des faces du boîtier émetteur et était en contact avec le liquide. Sa fréquence de résonance est de 215 kHz.

Le champ produit par cet émetteur s'est avéré beaucoup plus uniforme, bien que présentant encore des fluctuations d'amplitude du simple au double. Mais nous avons vu dans le chapitre VII que le calcul théorique montre que même un émetteur vibrant parfaitement en piston produit un champ non uniforme.

Avec ce deuxième émetteur, nous n'avons pas constaté de différences importantes entre les puissances émises par les diverses céramiques. C'est cet émetteur qui nous a permis d'obtenir des résultats expérimentaux concluants.

c - La cuve

La plupart des expérimentateurs ayant utilisé les ondes de Lamb ont utilisé comme milieu intermédiaire entre l'émetteur et la plaque ou bien un coin solide, en plastique par exemple, ou bien un liquide contenu dans une enceinte située au-dessus de la plaque ; cette enceinte était fermée par une membrane très mince ou bien, le liquide étant en contact direct avec la plaque, l'étanchéité entre l'enceinte et la plaque était assurée par une lèvre en matériau souple.

Cette solution, extrapolée à nos dimensions importantes, a posé des problèmes technologiques d'étanchéité difficilement surmontables.

C'est pourquoi nous avons préféré disposer la cuve en-dessous de la plaque et y faire plonger celle-ci en lui donnant une légère inclinaison par rapport à l'horizontale. Cette solution supprime tout problème d'étanchéité.

La constitution de la cuve posait essentiellement un problème d'amortisseurs. On pouvait en effet craindre que l'émetteur placé dans une cuve de dimensions restreintes par rapport à sa taille ne produise de multiples réflexions engendrant des ondes stationnaires. Pour les éviter, il fallait rendre les parois le moins réfléchissantes possible et amortir en particulier l'onde émise par la face arrière de l'émetteur et la partie du faisceau avant qui se réfléchit sur la surface de la plaque sans y pénétrer.

Pour cela, nous avons tapissé toutes les parois avec de la laine de verre dans le cas du tétrachlorure de carbone et de la mousse plastique dans le cas de l'eau. L'épaisseur de ces amortisseurs était de 2 cm environ.

Ces amortisseurs semblent avoir donné d'assez bons résultats. Dans le cas du tétrachlorure de carbone, l'amortissement semblait encore plus satisfaisant en ajoutant à la couche de laine de verre une plaque de liège aggloméré de 2 mm d'épaisseur.

d - Le châssis - Les chariots

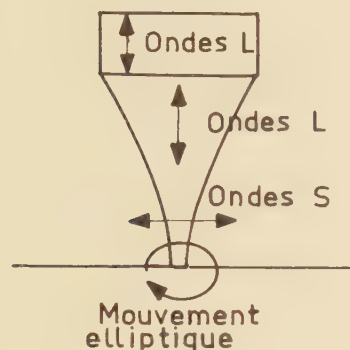
L'ensemble châssis et cuve a été réalisé de façon à former un ensemble rigide de manière à éviter toute variation de calage de la plaque par rapport à l'émetteur.

La plaque repose sur le châssis par ses bords latéraux sur une largeur de 1 cm environ. Il s'est avéré nécessaire de disposer sur cette surface de contact un isolant acoustique pour éviter le passage d'ondes ultrasonores vagabondes du châssis dans la

plaque. On pouvait en effet détecter des ondes dans la plaque en l'absence de tout contact entre la plaque et le liquide. En interposant une couche de liège aggloméré de 2 mm environ d'épaisseur, cet effet a presque totalement disparu.

Le système de rails et de chariots permettant de repérer les coordonnées du capteur au 1/2 mm près s'est avéré satisfaisant. La précision obtenue sur la position était satisfaisante, compte tenu des longueurs d'onde utilisées (5 à 15 mm).

e - Le capteur



Comme nous l'avons vu dans la partie bibliographique, les expérimentateurs étudiant les ondes de Lamb utilisaient pour les mesurer un dispositif identique à celui de l'émission (coin solide ou liquide). Nous avons choisi une voie différente en essayant de mesurer directement le déplacement de la surface de la plaque.

Le capteur avait pour rôle de mesurer sur une surface aussi petite que possible l'amplitude verticale du mouvement de la surface de la plaque. C'est pourquoi il est constitué par un tronc de cône de petite base et dont la forme exponentielle a pour fonction de répartir sur la surface de la céramique piézo-électrique l'énergie captée par la pointe.

La céramique, étant donné la direction de sa polarisation, est sensible aux contraintes verticales, donc aux ondes longitudinales se propageant dans le tronc de cône et engendrées par le déplacement vertical de la surface de la plaque, mais pas ou peu aux ondes transversales engendrées par les déplacements horizontaux de la surface de la plaque.

En principe, le capteur ainsi constitué doit donc transformer en tension électrique uniquement la composante verticale du déplacement de la surface de la plaque.

Nous n'avons malheureusement pas pu vérifier expérimentalement l'exactitude de ces considérations théoriques.

Par contre, nous avons étudié la fidélité du capteur.

Le seul paramètre ayant une influence sur l'amplitude reçue est l'inclinaison du capteur. Si on l'incline de 10 degrés environ par rapport à la perpendiculaire à la surface de la plaque, l'amplitude reçue peut varier du simple au double. C'est pourquoi nous avons utilisé un guidage vertical précis du support du capteur.

Moyennant cette précaution nous avons pu vérifier les points suivants :

- en un même point de la plaque, si l'on effectue plusieurs fois de suite la mesure de l'amplitude en rompant et rétablissant successivement le contact du capteur avec la plaque par déplacement vertical au moyen de la crémaillère, les résultats trouvés diffèrent de moins de 1 à 2 %;
- si l'on fait varier la pression sur la pointe du capteur en appliquant une force verticale au support du capteur les variations d'amplitude reçue sont négligeables;
- si l'on modifie le couplage entre la plaque et le capteur, par exemple par adjonction d'un milieu liquide (goutte d'huile), l'amplitude reçue demeure également inchangée (toujours à 1 ou 2 %);
- de même, l'état de la surface de la plaque (rugosité) ne semble pas avoir d'importance. La fidélité du capteur était donc suffisante.

La sensibilité du système s'est également avérée satisfaisante. La tension recueillie aux bornes de la céramique était de l'ordre du mV avec les plaques en matière plastique et

de l'ordre d'une dizaine de mV avec les plaques métalliques, pour une puissance de sortie du générateur respectivement de l'ordre de 50 W et 200 W.

Il est à noter que le capteur était également sensible aux bruits et vibrations mécaniques environnantes, même à la parole ; d'où la nécessité du filtre passe-haut de la chaîne de mesure.

f - Chaîne de mesure

La chaîne de mesure a donné des résultats satisfaisants. Avec le deuxième générateur H.F., le signal reçu par le capteur était pur et parfaitement stable, comme on peut en juger sur la photo 7 de l'écran de l'oscillographe prise avec une pose de plusieurs secondes et montrant en haut le signal de sortie du générateur et en bas le signal venant du capteur. L'amplitude mesurée sur le millivoltmètre était parfaitement stable au cours du temps.

L'oscillographe nous a permis, par un moyen simple, en appliquant respectivement aux plaques verticales et horizontales les tensions de sortie du générateur et du capteur, de mesurer la phase du signal reçu et par conséquent la longueur d'onde (photos 8 et 9).

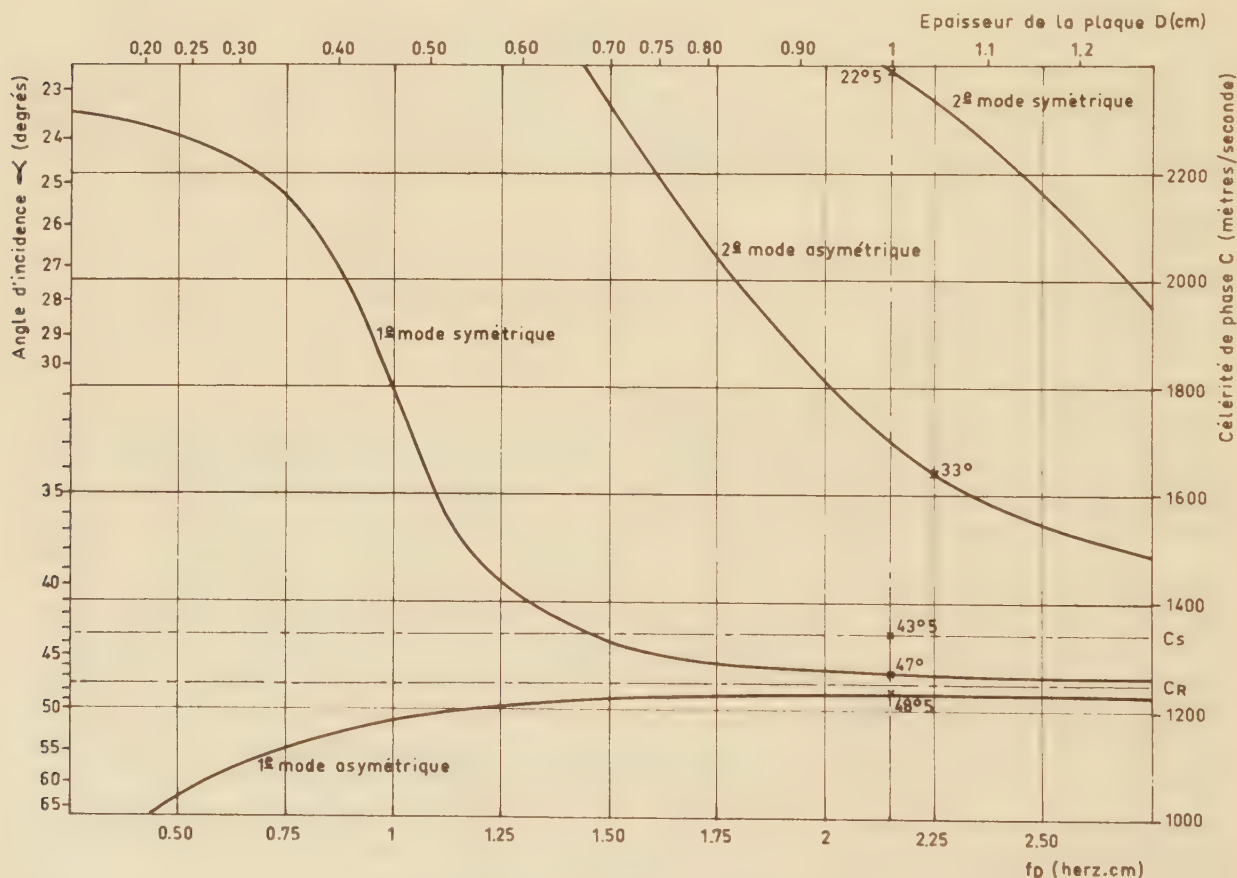


Figure 32 - Célérités et angles d'émission des ondes de Lamb dans du plexiglas couplé au tétrachlorure de carbone.

2 - PRODUCTION DES ONDES DE LAMB- ETUDE DU CHAMP OBTENU

Nous avons vu dans l'étude bibliographique que l'angle d'incidence du faisceau d'ultrasons permettant de produire une onde de Lamb d'un mode déterminé est donné par $\sin \theta = c_L/c$,

où : θ est l'angle d'incidence en degrés,

c la célérité de phase des ondes de Lamb,

c_L la célérité de phase des ondes longitudinales dans le milieu intermédiaire.

La figure 32 donne les courbes de célérité et d'angle pour les différents modes dans le cas de plexiglas couplé au tétrachlorure de carbone.

Les premières expériences de production d'ondes de Lamb ont été réalisées avec deux plaques de plexiglas d'épaisseurs 1 cm et 5 mm. Les célérités de phase des ondes de Lamb correspondantes, à la fréquence de 215 kHz, étaient respectivement de 1230 m/s et 1180 m/s.

Pour que la production soit possible, il faut que le sinus de l'angle d'incidence donné par la relation ci-dessus reste inférieur à 1, c'est-à-dire que c_L soit inférieur à c . C'est pourquoi l'eau ne convenant pas ($c_L = 1430$ m/s), nous avons utilisé du tétrachlorure de carbone liquide d'utilisation courante ayant la plus basse vitesse ($c_L = 920$ m/s). Les angles d'incidence théoriques correspondants étaient donc de $48^\circ 5'$ et 52° .

a - Choix de l'angle d'incidence

Nous avons tenté de vérifier expérimentalement ces valeurs théoriques en faisant varier l'angle d'incidence et en mesurant l'amplitude reçue en un point de la plaque en fonction de cet angle d'incidence.

Comme nous l'avons vu dans la partie bibliographique, les expérimentateurs ont ainsi obtenu, en faisant varier simultanément l'angle d'émission et de réception, une courbe d'amplitude présentant une succession de maximums correspondant aux différents modes et séparés par des minimums correspondant à des angles pour lesquels il n'y a pratiquement production d'aucune onde (la figure 19 donne une courbe de ce type). Pour notre part, nous n'avons pas réussi à relever une courbe aussi nette. Les maximums obtenus étaient peu prononcés et parfois différents si l'on changeait le point de mesure sur la plaque. En outre, il n'existait pas de valeur de l'angle d'incidence pour laquelle l'amplitude reçue soit faible.

Cette méthode ne nous a donc pas permis de déterminer une valeur expérimentale de l'angle d'incidence optimal. La raison de cet échec est probablement double :

- d'une part, le faisceau incident ne doit pas être assez directif et les amortisseurs n'éliminent peut-être pas toutes les réflexions,
- d'autre part, comme nous le verrons ci-après, l'amplitude du champ produit dans la plaque varie d'un point à un autre et cette variation spatiale change avec l'angle d'incidence.

Pour ajuster expérimentalement notre angle d'incidence, nous avons donc procédé d'une autre façon.

Nous avons exploré longitudinalement et transversalement le champ dans la plaque pour différentes valeurs de l'angle d'incidence au voisinage de la valeur théorique. Et finalement nous retenons comme valeur optimale celle qui donnait le champ ultrasonore de caractéristiques les plus satisfaisantes suivant des critères dont nous parlerons dans le paragraphe suivant. L'angle ainsi retenu était toujours égal ou très peu différent de la valeur théorique (cf tableau ci-après).

Comparaison des valeurs théoriques et expérimentales
des angles d'incidence à l'émission

Caractéristiques de la plaque	Valeur théorique	Valeur expérimentale
Plexiglas épaisseur 10 mm	48,5	
Plexiglas épaisseur 5 mm	51,0	54,0
Duralumin épaisseur 10 mm	32,5	33,5
Duralumin épaisseur 5 mm	38,0	37,5
Laiton épaisseur 10 mm	47,0	46,0
Laiton épaisseur 5 mm	53,5	58,0
Laiton épaisseur 3 mm	65,0	66,0
Acier épaisseur 6 mm	36,0	35,0

b - Caractéristiques du champ obtenu

Les principales caractéristiques du champ que nous avons relevées sont les suivantes :

- un relevé transversal des amplitudes et des positions des points de même phase qui nous donne la forme d'un front d'onde et la variation d'amplitude le long de ce front ;
- un relevé longitudinal dans l'axe de la plaque des amplitudes et des positions des points en phase et en opposition de phase avec le générateur.

Ce deuxième relevé nous permet d'obtenir trois caractéristiques du champ : la longueur d'onde, l'amortissement et la régularité d'amplitude.

Nous allons résumer ci-après les résultats qualitatifs concernant les différents points.

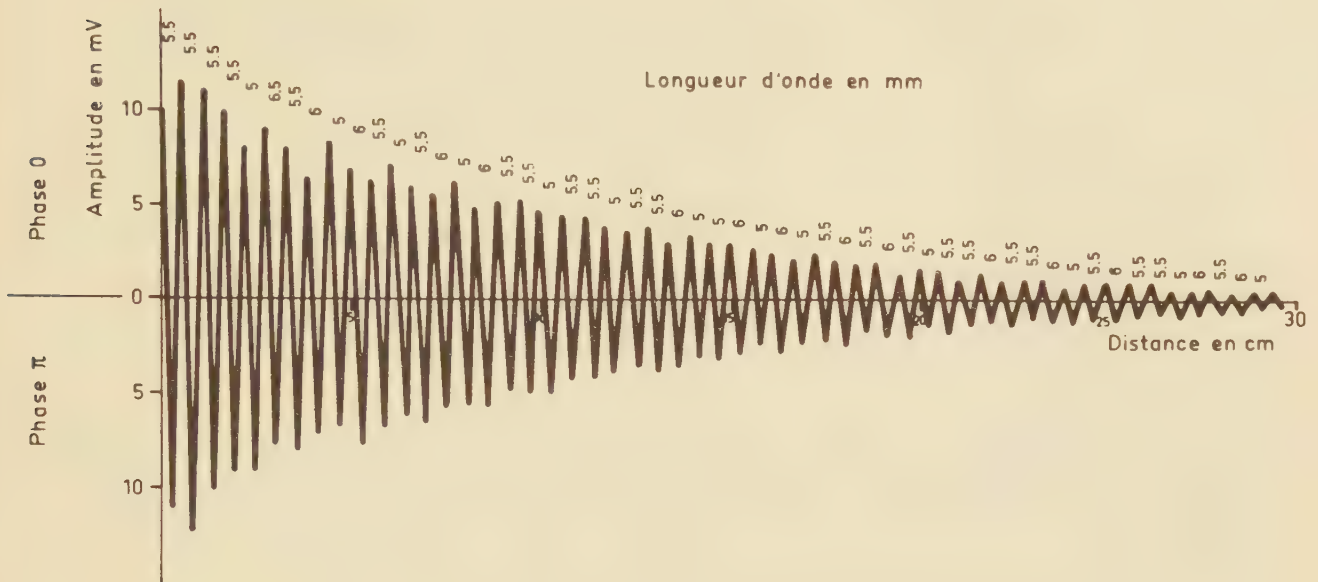
α) Forme du front d'onde

Les fronts d'onde relevés (figures 33b et 33c) sont toujours sensiblement rectilignes. Les déviations maximales par rapport à une droite parfaite étaient de ± 1 mm pour les longueurs d'onde voisines de 5 mm et de $\pm 1,5$ mm pour les longueurs d'onde de l'ordre de 10 mm.

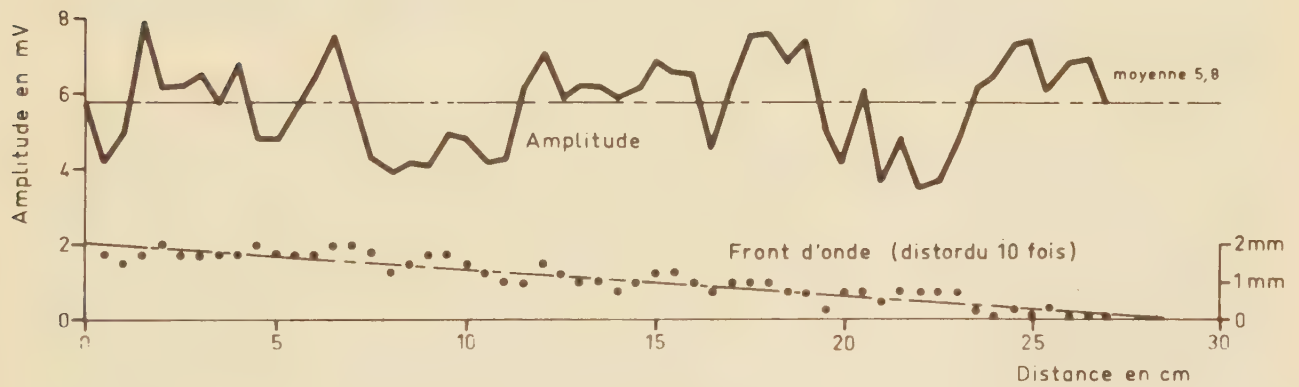
β) Répartition transversale d'amplitude

L'amplitude varie le long d'un front d'ondes de façon relativement importante (figures 33b et 33c) ; le maximum peut atteindre le double du minimum.

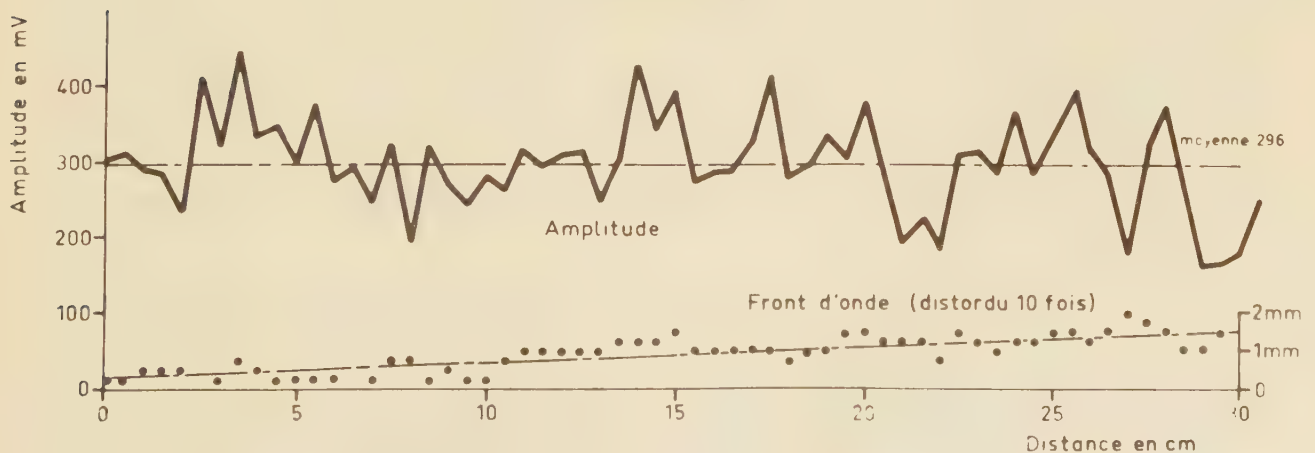
Comme nous le verrons par la suite, cette variation est d'autant plus importante que l'épaisseur de la plaque est grande. Pour une épaisseur faible, on arrive à avoir une amplitude pratiquement uniforme.



a - Exploration longitudinale - Plexiglas épaisseur 5 mm.



b - Exploration transversale - Plexiglas épaisseur 5 mm.



c - Exploration transversale - Laiton épaisseur 5 mm.

Figure 33 - Relevés du champ ultrasonore dans la plaque.

γ) Evolution longitudinale de l'amplitude

L'amplitude fluctue très sensiblement d'un front d'onde à l'autre (le front d'onde est défini comme étant l'ensemble des points en phase ou en opposition de phase avec le générateur).

Cette fluctuation, comme celle transversale, peut atteindre le simple au double ; elle est également plus importante pour les épaisseurs de plaque importantes.

Mais, en moyenne, sur plusieurs longueurs d'onde, elle reste constante dans le cas des plaques métalliques et suit une loi exponentielle d'amortissement dans le cas des plaques de plexiglas (figure 33a).

L'importance de ces fluctuations dépend également de l'angle d'incidence et est un des critères permettant de régler celui-ci.

δ) Longueur d'onde

Nous avons défini la longueur d'onde comme étant la distance séparant deux crêtes ou deux creux. Cette longueur d'onde fluctue légèrement (figure 33a). Mais sa valeur moyenne, égale à la distance séparant deux crêtes éloignées divisée par le nombre de longueurs d'ondes, est remarquablement constante et indépendante des points choisis pour sa mesure.

Les fluctuations autour de cette valeur moyenne sont de l'ordre de $1/2$ mm pour $\Lambda = 6$ mm et 1 mm pour $\Lambda = 12$ mm, pour l'angle d'incidence optimal. Leur importance augmente quand on s'écarte de cet angle optimal. Elles constituent donc un deuxième critère pour le choix de ce dernier.

c - Conclusions

Le champ obtenu, dans la plaque de plexiglas n'est pas parfait. Vu la forme des fronts d'onde obtenus, il peut être considéré comme plan. Mais il n'est pas uniforme au point de vue amplitude. Le fait que ces fluctuations d'amplitude soient plus importantes pour les plaques épaisses dans lesquelles les célérités des différents modes d'ondes de Lamb (figure 32) sont plus voisines, semble prouver que ces fluctuations proviennent d'un mélange de plusieurs modes d'ondes, le premier mode asymétrique qui nous intéresse étant donc prépondérant, mais pas seul et en particulier accompagné du premier mode symétrique. Pour les épaisseurs plus faibles, les célérités de ces autres modes deviennent très différentes, ce qui expliquerait qu'on puisse alors produire des ondes 1er mode asymétrique plus "pures".

Il est à signaler que nous avons obtenu un champ ultrasonore acceptable dans toutes les plaques élastiques que nous avons utilisées, excepté dans la plaque de plexiglas de 1 cm d'épaisseur (qui correspond à un (fD) égal à 2,15 hertz.cm) où nous n'avons pas réussi à produire une onde suffisamment pure.

3 - RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX CONCERNANT LES LOIS DE PROPAGATION

a - Généralités

Après nous être assuré que l'installation expérimentale était capable de produire des ondes de Lamb planes, nous avons réalisé un certain nombre d'expériences destinées à mettre en évidence les lois de propagation.

Pour cela, nous avons utilisé diverses plaques, à savoir :

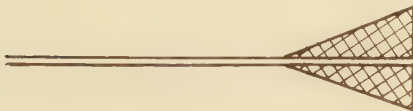
- 1 plaque de plexiglas d'épaisseur 5 mm,
- 1 plaque de plexiglas d'épaisseur 5 mm comportant un tronçon de 2 mm d'épaisseur avec deux raccords en pente douce,

- 2 plaques de duralumin d'épaisseurs 10 et 5 mm,
- 3 plaques de laiton d'épaisseurs 10, 5 et 3 mm,
- 1 plaque d'acier d'épaisseur 6 mm,
- 1 plaque de duralumin d'épaisseur variable entre 10 et 2 mm.

Dans les plaques de plexiglas, l'amortissement des ondes de Lamb est considérable. En 25 cm de propagation, l'amplitude est divisée par 10. Le problème de la réflexion à l'extrémité de la plaque ne se posait donc pas.

Ces plaques de plexiglas nous ont permis de mesurer l'amortissement de l'onde au cours de sa propagation et de mettre en évidence la variation progressive de la longueur d'onde, donc de la célérité de phase, en milieu d'épaisseur lentement variable.

Dans les plaques métalliques, l'amortissement des ondes devient négligeable et nous n'avons pas pu mettre en évidence de diminution d'amplitude sur toute la longueur de la plaque. Cette absence d'amortissement nous a obligé à utiliser un dispositif pour éliminer la réflexion sur l'extrémité et sur les bords de la plaque. Pour cela, nous avons disposé sur les deux faces de la plaque un talus de mastic frais de pente 1/2 sur une largeur de 8 cm environ sur les bords de la plaque et 40 cm en son extrémité.



Le principe de cet amortisseur est le suivant : les ondes de Lamb rayonnent de l'énergie dans le mastic sous forme d'ondes L qui y sont amorties.

L'efficacité de cet amortisseur a pu être vérifiée en le disposant en début de plaque près de l'émetteur : l'amplitude reçue en aval était pratiquement nulle.

Néanmoins, le champ relevé longitudinalement dans les plaques métalliques présentait des fluctuations d'amplitude beaucoup plus importantes que celles du champ relevé dans le plexiglas ; mais ces fluctuations ne correspondaient pas à des ondes stationnaires.

Les diverses plaques métalliques nous ont permis de mesurer les valeurs de la longueur d'onde, donc de la célérité de phase, pour différentes valeurs de la quantité adimensionnelle fD/c_s et de les comparer avec la courbe théorique.

La plaque de duralumin d'épaisseur variable nous a permis de mettre en évidence la variation de célérité de phase en épaisseur lentement variable et la déformation des fronts d'onde qu'elle entraîne. Nous avons pu également mettre en évidence la variation d'amplitude due à la variation de l'écartement des orthogonales aux fronts et à la variation de la célérité de groupe.

Nous donnons ci-après les principaux résultats de ces diverses expériences en les répartissant en quatre paragraphes à savoir :

- propagation dans une plaque d'épaisseur constante : coefficient d'amortissement ;
- mise en évidence de la variation de célérité de phase en plaque d'épaisseur lentement variable ;
- valeurs de la célérité de phase dans différentes plaques de différents matériaux ;
- plaque taillée : plan de vagues.

b - Propagation dans une plaque d'épaisseur constante : coefficient d'amortissement

Le relevé longitudinal d'amplitude de la figure 34 en coordonnées semi-logarithmiques a été réalisé dans une plaque de plexiglas d'épaisseur constante égale à 5 mm. L'angle d'incidence à l'émission était de 54° dans le tétrachlorure de carbone.

Les points représentés correspondent aux creux et crêtes successifs. Nous avons tracé, sur la figure, la droite de régression calculée sur ordinateur en ne prenant en compte que les points d'abscisse inférieure à 20 cm.

Nous avons ainsi tracé la droite de régression et calculé le coefficient d'amortissement α pour quatre expériences.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Expérience 1	$\alpha = 0,0983 \text{ cm}^{-1}$
Expérience 2	$\alpha = 0,0915 \text{ cm}^{-1}$
Expérience 3	$\alpha = 0,101 \text{ cm}^{-1}$
Expérience 4	$\alpha = 0,0988 \text{ cm}^{-1}$

α étant défini par :

$$A = A_0 e^{-\alpha x} \quad \left| \begin{array}{l} A_0 \text{ amplitude à l'origine} \\ A \text{ amplitude à l'abscisse } x \\ x \text{ abscisse en centimètres} \end{array} \right.$$

La valeur moyenne de α est donc $\alpha = 0,097 \text{ cm}^{-1}$. Elle est en assez bonne concordance avec la valeur théorique que donnent Press et Healy pour une onde de surface et qui, pour 215 kHz, est de $0,115 \text{ cm}^{-1}$ (cf. chapitre VI).

Nous ne pouvons d'ailleurs pas comparer exactement ces résultats, puisque, dans notre cas, nous ne sommes pas en présence d'ondes de surface, mais seulement d'ondes de Lamb voisines d'ondes de surface ($c/c_R = 0,88$).

Dans le cas des plaques métalliques, l'amortissement a été dans tous les cas négligeable.

c - Mise en évidence de la variation de célérité de phase en plaque d'épaisseur lentement variable

Pour mettre en évidence la variation de la vitesse de phase en fonction de l'épaisseur, nous avons utilisé une plaque de plexiglas d'épaisseur 5 mm comportant un tronçon de 10 cm de longueur d'épaisseur réduite (1,7 mm) raccordé par deux talus de pente uniforme et de longueur 10 cm. Cet ensemble constitue un milieu d'épaisseur lentement variable aux lignes d'égale épaisseur (que nous appellerons lignes de niveau) parallèles aux fronts d'onde. Les fronts d'onde sont donc demeurés rectilignes et parallèles entre eux.

Nous avons porté dans la partie supérieure de la figure 35 la variation, en fonction de l'abscisse, de la longueur d'onde mesurée entre deux crêtes voisines. Elle est accompagnée d'une deuxième courbe donnant la variation correspondante de l'épaisseur de la plaque.

On remarque sur cette figure les fluctuations locales de longueur d'onde signalées au paragraphe 2. Malgré ces fluctuations, on distingue la variation progressive de la longueur d'onde en fonction de l'épaisseur.

Les valeurs moyennes de la longueur d'onde mesurées sur une longueur d'une dizaine de cm sont respectivement de 5,45 et 4,42 mm pour les épaisseurs de 5 mm et 1,7 mm. La courbe continue a été tracée à partir de ces valeurs moyennes.

Sur la même figure, dans la partie inférieure, nous avons porté les résultats semblables obtenus avec une plaque de duralumin d'épaisseur variable entre 10 et 2 mm (plaque

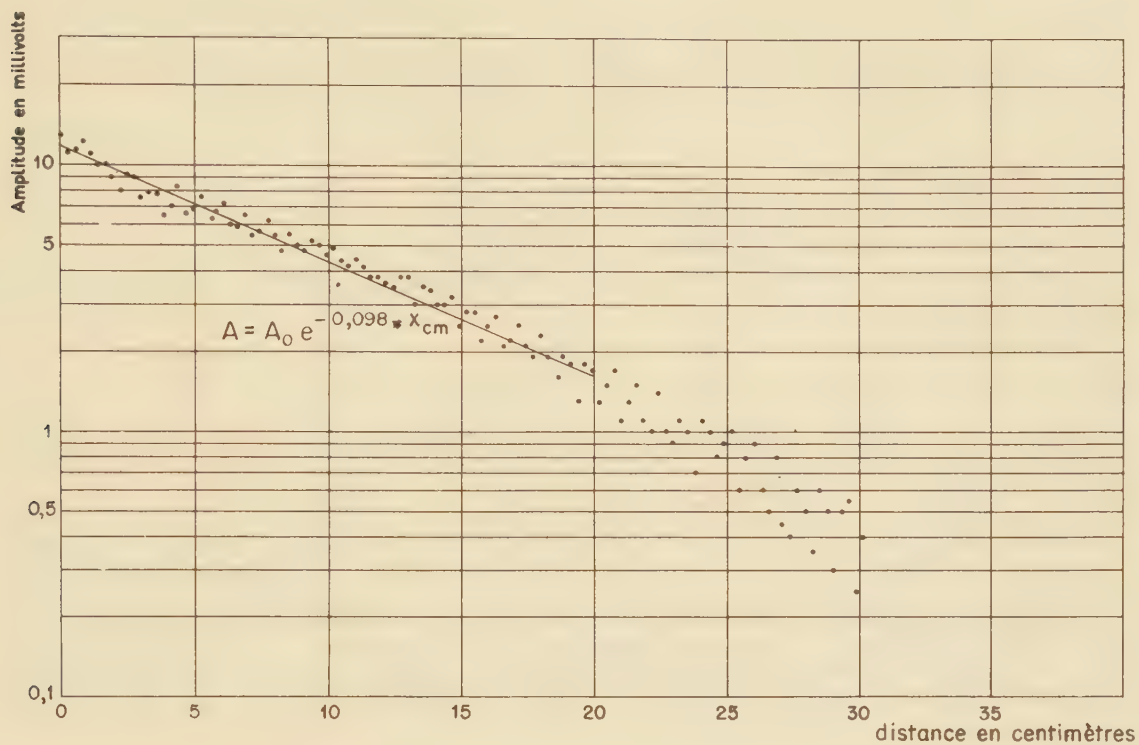


Figure 34 - Plaque de plexiglas d'épaisseur 5 mm. Relevé d'amplitude suivant l'axe.

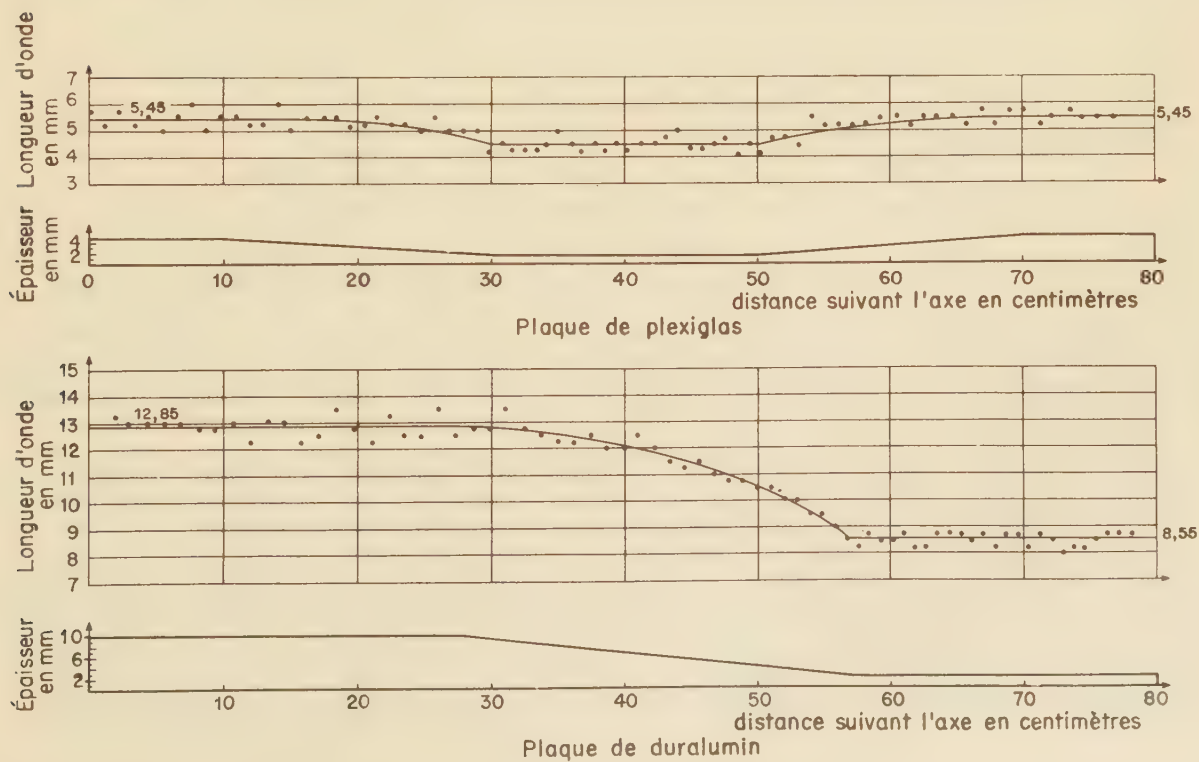


Figure 35 - Variation de la longueur d'onde dans une plaque d'épaisseur lentement variable.

taillée du paragraphe suivant). La longueur d'onde moyenne varie cette fois de 12,85 à 8,55 mm.

La figure 36 donne le relevé longitudinal d'amplitude obtenu avec la plaque de plexiglas d'épaisseur variable. Elle permet de faire trois constatations :

α) dans le tronçon d'épaisseur décroissante, une augmentation d'amplitude semble réduire la décroissance due à l'amortissement ;

β) dans le tronçon d'épaisseur égale à 1,7 mm, le coefficient d'amortissement est légèrement supérieur à celui en épaisseur 5 mm ;

γ) dans le tronçon d'épaisseur croissante, une diminution d'amplitude semble augmenter la décroissance due à l'amortissement.

Les constatations α et γ vérifient qualitativement l'évolution d'amplitude de la théorie en épaisseur lentement variable (figure 15 chapitre V).

d - Valeurs de la célérité de phase dans différentes plaques de différents matériaux - Comparaison avec la théorie

Les relevés de champ dans les diverses plaques (de différents matériaux et de différentes épaisseurs) utilisées ont permis de mesurer la valeur de la longueur d'onde, donc de la célérité de phase, pour différentes valeurs de la quantité adimensionnelle fD/c_s (fD_*).

Les différents points obtenus ont été portés sur la figure 37. Le calcul des coordonnées adimensionnelles de ces points nécessite la connaissance de la valeur de la célérité c_s des ondes transversales dans les différents matériaux. Or, cette valeur n'est pas connue avec précision et varie légèrement suivant la qualité du matériau. Nous avons donc procédé de la façon suivante :

A partir des valeurs bibliographiques de c_L célérité des ondes longitudinales et ν coefficient de Poisson, nous avons calculé une première valeur de c_s .

Matériau	Valeurs bibliographiques		Valeurs calculées	
	c_L m/s	ν	c_s/c_L	c_s m/s
Plexiglas	2680	0,333	0,500	1340
Laiton	4430	0,331	0,502	2220
Dural	6220	0,333	0,500	3110
Acier	5810	0,300	0,544	3160

Avec cette valeur de c_s , nous avons calculé les différentes valeurs théoriques de c_* et $(fD)_*$ correspondant aux différentes plaques, ainsi que les célérités et longueurs d'onde correspondantes. Ces valeurs, qualifiées de valeurs théoriques, sont portées dans la partie 1 du tableau 13.

Dans la partie 2, intitulée valeurs expérimentales, du même tableau, nous avons porté les valeurs expérimentales de c et de Λ ainsi que les valeurs de c_* et $(fD)_*$ correspondantes obtenues à partir de la valeur théorique de c_s évaluée ci-dessus.

Ces deux parties constituent donc une comparaison brute des valeurs théoriques et expérimentales. On remarque que les valeurs théoriques et expérimentales de la longueur d'onde sont en assez bonne concordance. Les différences relatives sont inférieures à 1 % pour le plexiglas et à 5 % pour le duralumin et le laiton. Mais cette différence dépend essentiellement de la valeur retenue pour c_s . Comme nous sommes plus spécialement intéressés par la variation de la célérité en fonction de l'épaisseur de la plaque, nous

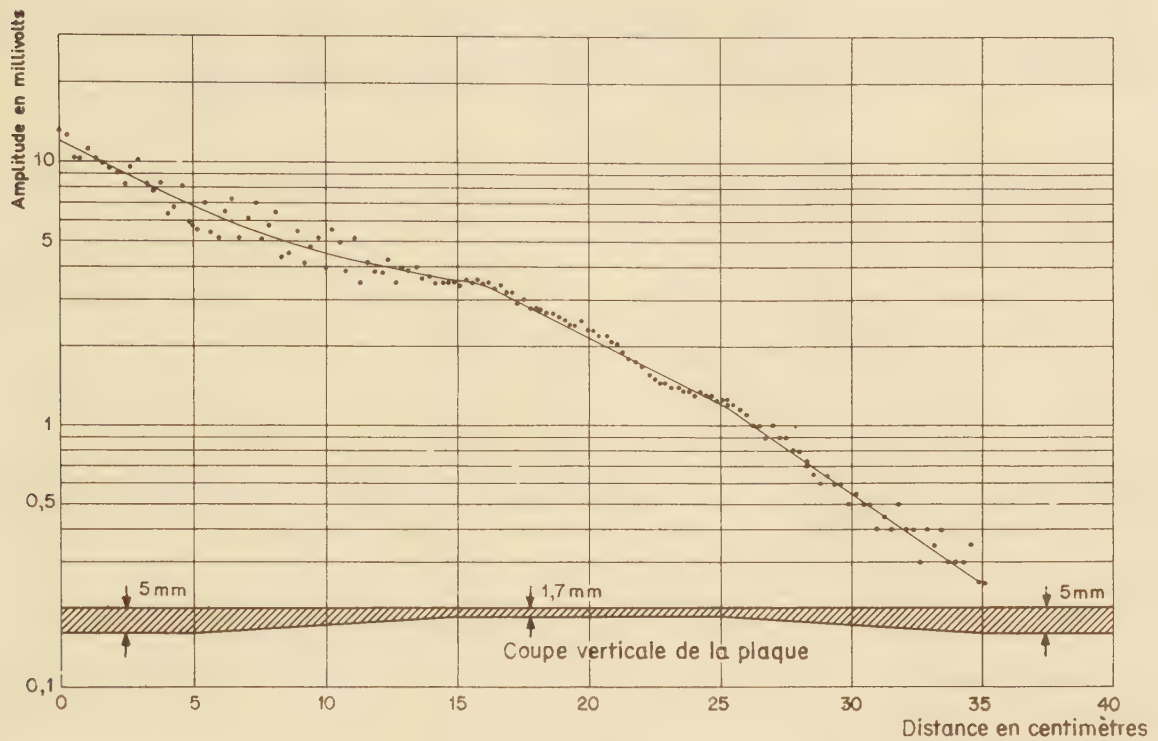


Figure 36 - Plaque de plexiglas d'épaisseur variable de 5 à 2 mm. Relevé d'amplitude suivant l'axe.

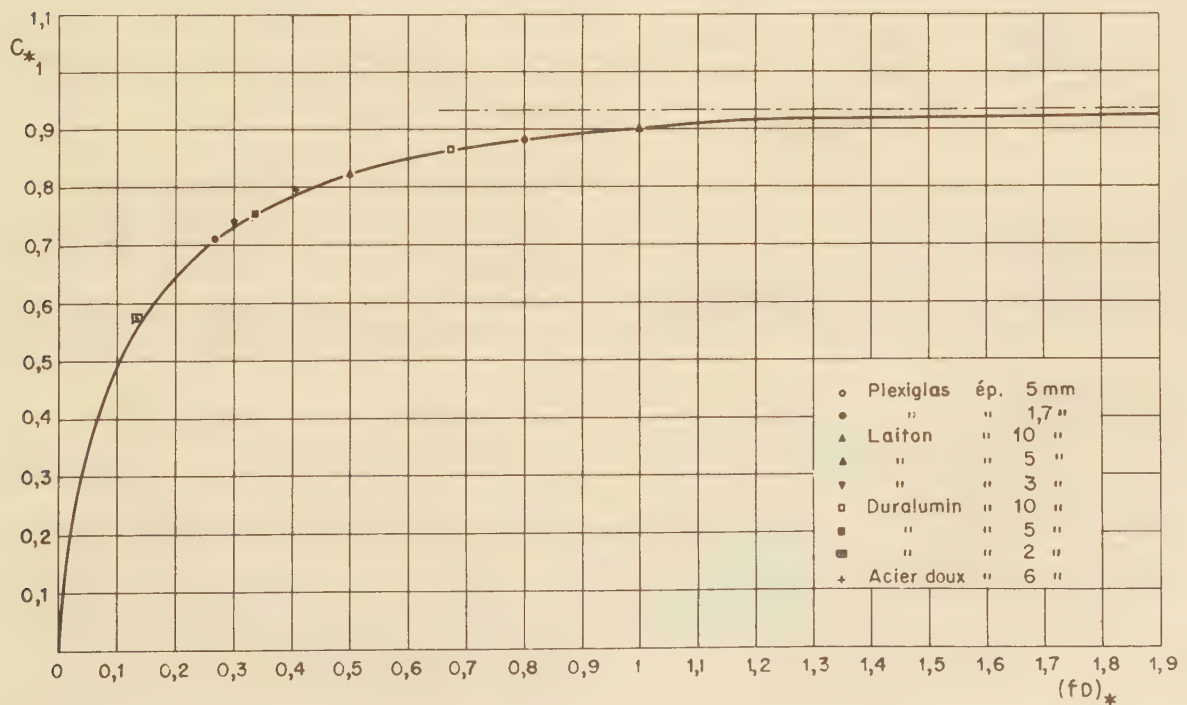


Figure 37 - Comparaison des valeurs expérimentales et théoriques de la célérité de phase.

avons corrigé la valeur du c_s de deux matériaux (le laiton et le duralumin) de manière à ramener pour chacun un des points expérimentaux (celui repéré par un astérisque sur le tableau) en coïncidence exacte avec la courbe théorique. Les nouvelles valeurs de c_s ainsi obtenues sont de 2150 m/s et 3200 m/s au lieu de 2220 m/s et 3110 m/s.

Tableau 13

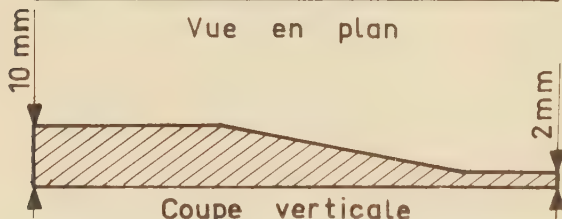
Célérité - Longueur d'onde - Valeurs théoriques et expérimentales
Fréquence 215 kHz

Caractéristiques de la plaque	1 - Valeurs théoriques					2 - Valeurs expérimentales brutes				3 - Valeurs expérimentales corrigées		
	C _s m/s	(fD)*	C*	C m/s	λ mm	λ mm	C m/s	C*	(fD)*	C _s m/s	fD*	C*
Plexiglas 5 mm	1340	0,802	0,880	1180	5,48	5,45	1170	0,873	0,802	1340	0,802	0,873
Plexiglas 1,7 mm	1340	0,268	0,707	947	4,40	4,42	950	0,708	0,268	1340	0,268	0,708
*Laiton 10 mm	2220	0,968	0,900	2000	9,30	9,00	1935	0,870	0,968	2150	1,00	0,900
Laiton 5 mm	2220	0,484	0,817	1810	8,42	8,22	1770	0,797	0,484	2150	0,500	0,823
Laiton 3 mm	2220	0,290	0,725	1610	7,48	7,38	1590	0,716	0,290	2150	0,300	0,738
*Dural 10 mm	3110	0,691	0,865	2690	12,5	12,85	2760	0,887	0,691	3200	0,672	0,862
Dural 5 mm	3110	0,346	0,755	2350	10,9	11,20	2400	0,772	0,346	3200	0,336	0,751
Dural 2 mm	3110	0,138	0,562	1750	8,10	8,55	1840	0,592	0,138	3200	0,134	0,575
Acier 6 mm	3160	0,408	0,787	2490	11,6	11,70	2510	0,795	0,408	3160	0,408	0,795

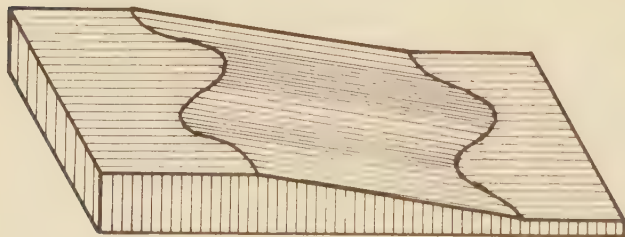
* Valeur expérimentale utilisée pour corriger la valeur de C_s .



Vue en plan



Coupe verticale



Vue en perspective

Plaque de duralumin taillée

Compte tenu de ces valeurs, nous obtenons de nouvelles valeurs expérimentales de fD_* et de C_* qui sont portées dans la partie 3 du tableau 13. Ce sont ces valeurs qui, sur la figure 37, sont comparées avec la courbe théorique calculée pour un coefficient de Poisson $\nu = 0,33$.

On constate que, sous réserve d'un choix adéquat du c_s du matériau utilisé, l'accord est bon. En particulier, pour un même matériau, les différents points correspondant à diverses épaisseurs s'accordent bien avec la loi théorique de variation de célérité de phase avec l'épaisseur.

e - Plaque taillée : Plan de vagues

Dans cette expérience, nous avons utilisé une plaque de duralumin de 150×50 cm taillée en épaisseur variable. L'extrémité côté émetteur avait une épaisseur de 10 mm et l'extrémité opposée une épaisseur de 2 mm. La partie centrale était taillée en pente douce uniforme suivant des lignes d'égale épaisseur en forme de S.

La figure de la page précédente donne la vue en plan, la coupe et une vue en perspective schématisée de cette plaque.

Sur le dispositif expérimental, la plaque était disposée la face taillée en dessous, les mesures d'amplitude par capteur se faisant sur la face plane.

En termes de houle, cette plaque taillée schématise un golfe et un cap, mouvements de terrain qui provoquent respectivement une divergence et une convergence des ondes.

Sur la surface de cette plaque, nous avons relevé tous les fronts d'onde (courbes isophases) en déplaçant lentement le capteur au moyen du système de chariots tout en maintenant constante la phase du signal reçu, au moyen de l'oscillographe (cf. dispositif expérimental photo 7).

La figure 38 reproduit le relevé obtenu en prenant des fronts d'onde espacés de 4 et de 2 longueurs d'onde. Nous y avons ajouté les lignes orthogonales aux crêtes, tracées graphiquement.

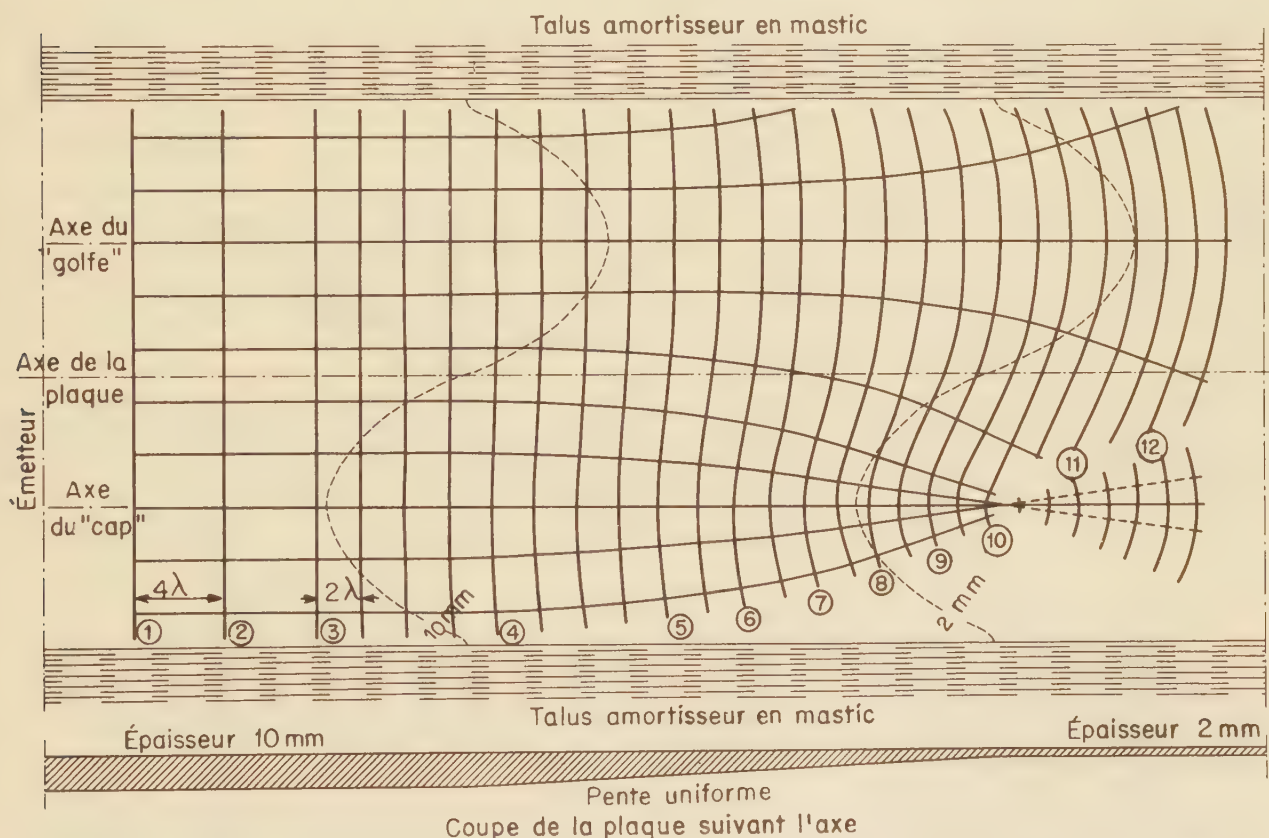


Figure 38 - Relevé de courbes isophases sur la plaque de duralumin taillée simulant un "golfe" et un "cap".

Cette figure permet trois remarques :

- On distingue nettement la décroissance progressive de la longueur d'onde avec la diminution d'épaisseur. L'écartement des crêtes successives varie en effet lentement. Nous avons porté les valeurs de la longueur d'onde, mesurée entre deux crêtes voisines, en fonction de l'abscisse dans la partie inférieure de la figure 34. Nous avons d'ailleurs vu au paragraphe précédent que la valeur de la longueur d'onde dans la partie d'épaisseur 2 mm correspond à la valeur théorique.

- Sur le "cap", les ondes convergent fortement.
- Dans le "golfe", les ondes divergent également notablement.

Nous avons également procédé à des relevés d'amplitude longitudinaux et transversaux

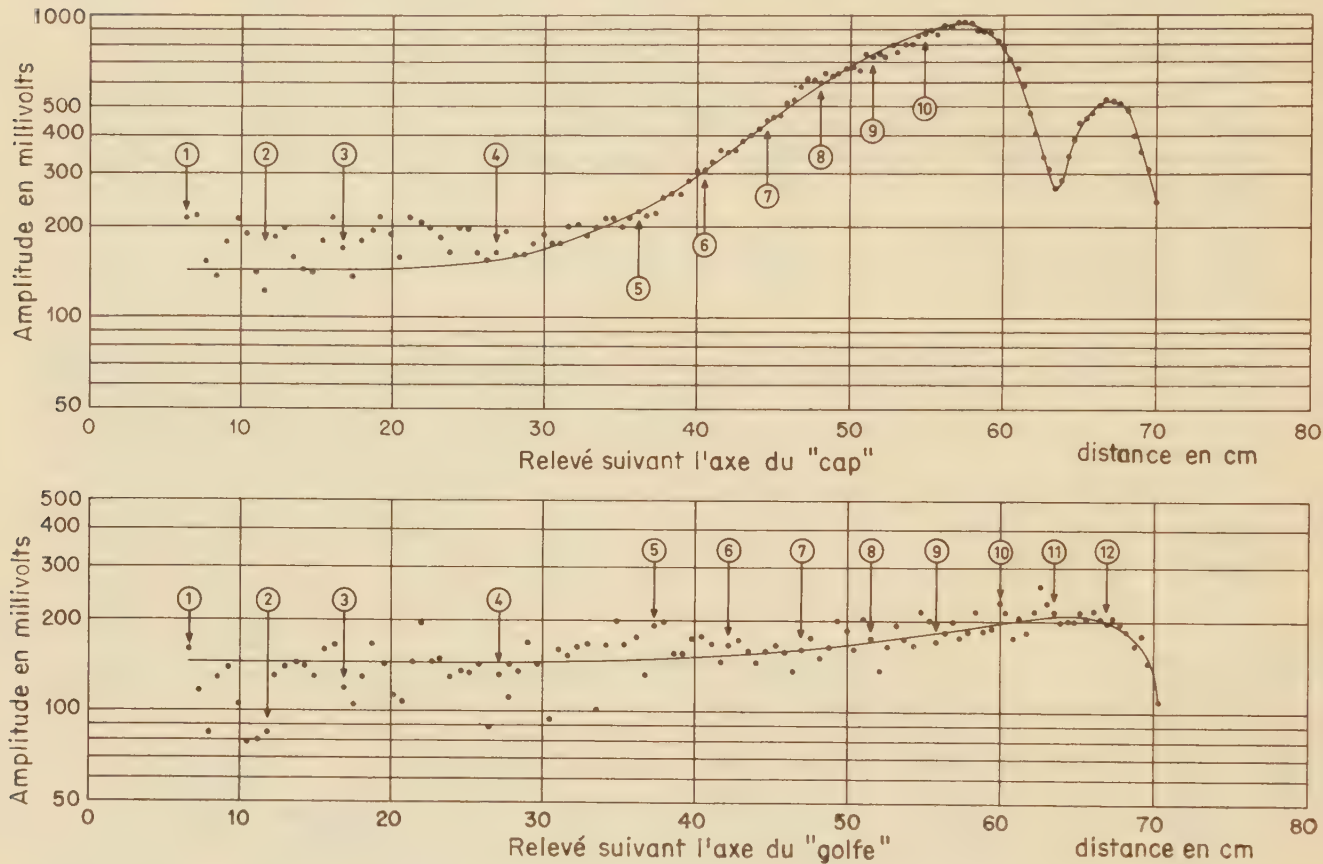


Figure 39 - Relevés d'amplitude sur la plaque de duralumin taillée.

La figure 39 donne les relevés d'amplitude longitudinaux suivant l'axe du cap et l'axe du golfe. Les flèches numérotées indiquent la position des crêtes repérées par le même numéro sur la figure 38. La courbe continue représente la valeur moyenne des points expérimentaux. Son point de départ côté émetteur correspond à l'amplitude dite initiale définie ci-dessous.

Les figures 40 et 41 donnent les relevés d'amplitude transversaux suivant les crêtes. Ces différents relevés sont repérés par un numéro correspondant, comme ci-dessus, à celui de la figure 38.

Les traits pleins horizontaux des relevés (1), (2) et (3) représentent la valeur moyenne de l'amplitude pour chacun d'eux. Les traits mixtes horizontaux des autres relevés (4) à (12) représentent la moyenne d'amplitude des trois relevés (1), (2) et (3). Cette valeur moyenne représentera l'amplitude du champ incident et sera appelée amplitude initiale ou, en termes de houle, amplitude au large.

Ces trois figures nous permettent de constater :

- que les fluctuations longitudinales et transversales d'amplitude dans la partie d'épaisseur 10 mm sont importantes comme nous l'avons déjà signalé ;

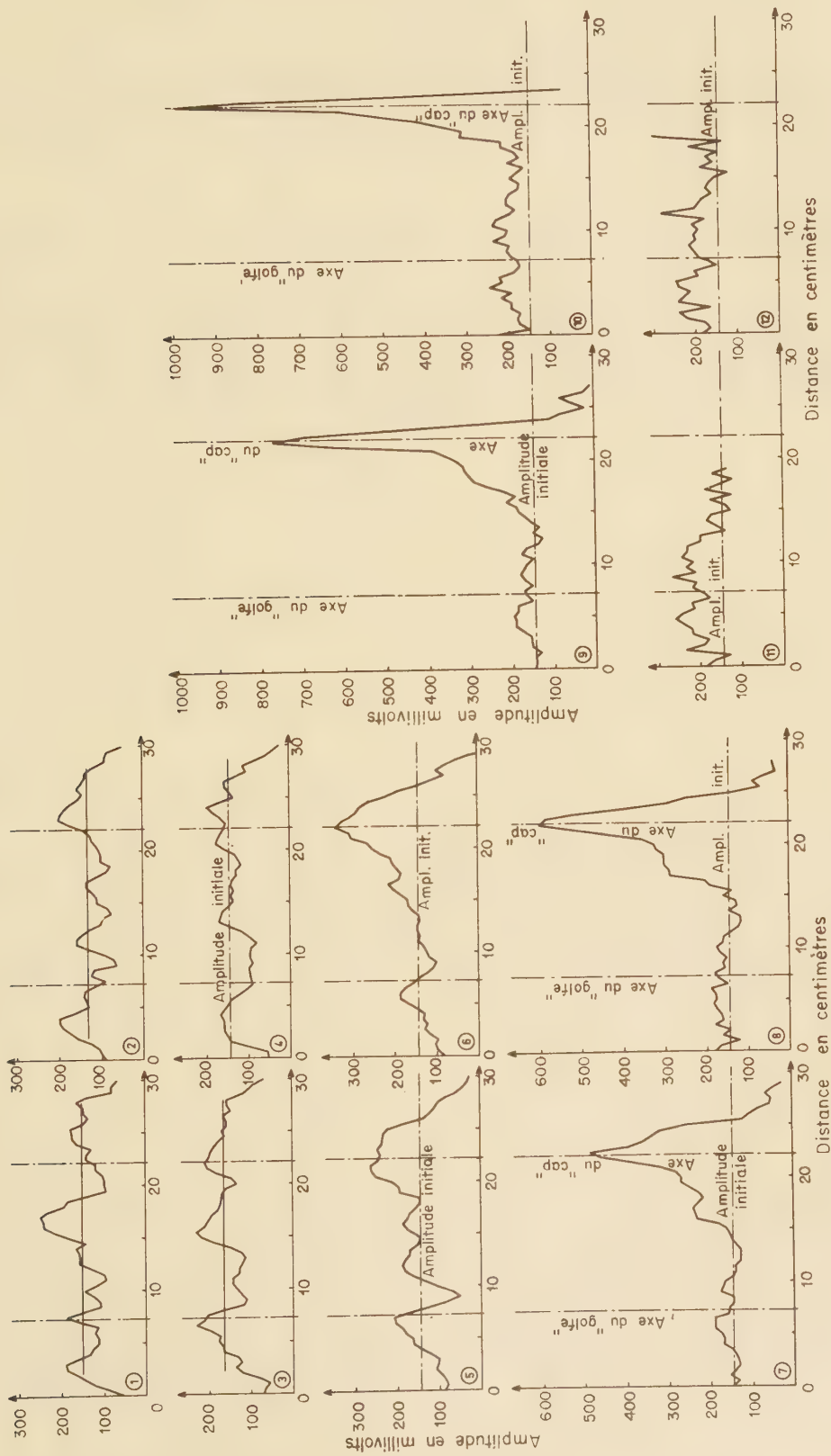


Figure 41 - Relevés d'amplitude dans la plaque de duralumin taillée le long des courbes isophases (crêtes).

Figure 40 - Relevés d'amplitude dans la plaque de duralumin taillée le long des courbes isophases (crêtes).

- qu'elles diminuent lorsque l'épaisseur décroît et qu'elles deviennent négligeables au voisinage du point de convergence dû au "cap";
- que la convergence des orthogonales due au cap provoque une concentration d'énergie et une augmentation d'amplitude très importante, qui est renforcée par l'augmentation d'amplitude due à la variation de vitesse de groupe, due elle-même à la variation d'épaisseur ;
- que la diminution d'amplitude consécutive à la divergence des orthogonales due au golfe est compensée par l'augmentation due à la diminution de vitesse de groupe en épaisseur décroissante.

Qualitativement, les résultats de cette expérience correspondent bien aux lois théoriques de propagation. Le plan de vagues ultrasonore obtenu présente les mêmes caractéristiques qu'un plan de vagues de houle en des lieux de topographie semblable. Ces résultats serviront de base au chapitre suivant où ils seront comparés quantitativement au résultat d'un calcul numérique de houle en similitude.

Chapitre IX

RELATIONS ANALOGIQUES

PRINCIPALES NOTATIONS PROPRES AU CHAPITRE IX

$f_1 = \frac{2\pi}{T}$ fréquence de la houle

$\omega_1 = 2\pi f_1$ pulsation de la houle

$\omega = 2\pi f$ pulsation des ondes ultrasonores

x_1, t_1 : abscisse, temps pour la houle

x, t : abscisse, temps pour les ultrasons

$\xi_1 = k = \frac{2\pi}{L}$ nombre d'onde de la houle

E_1 : échelle des longueurs

E_h : échelle des hauteurs

E_t : échelle des temps

1 - DIAGRAMME ADIMENSIONNEL DE LA HOULE

Pour la houle, les courbes de variation de la vitesse de phase, de la vitesse de groupe et de l'amplitude en fonction de la profondeur peuvent être tracées d'une manière semblable à celles des ondes de Lamb en utilisant les paramètres adimensionnels $d/g T^2$ en abscisse, $C/C_0, C_g/C_0, h/h_0$ en ordonnée. Le paramètre $d/g T^2$, qui fait intervenir la profondeur et la période (épaisseur et fréquence pour les ondes de Lamb fD_*), est identique au paramètre d/L_0 (L_0 longueur d'onde en profondeur infinie) au facteur 2π près.

Les trois courbes ainsi obtenues ont été tracées sur la figure 42 à partir des valeurs du tableau 14.

2 - COMPARAISON DES COURBES RELATIVES À LA HOULE ET AUX ONDES DE LAMB

a - Célérités

Sur la figure 43, nous avons tracé simultanément les courbes de célérité de la houle et des ondes de Lamb en se fixant un rapport constant entre les variables $(fD)_*$ et $d/g T^2$ égal à 16. Cette valeur a été choisie de manière à ce que les deux courbes de vitesse de phase aient un point commun aux environs de l'abscisse $fD_* = 0,5$.

On remarque que les deux courbes de phase sont très voisines. L'écart en ordonnée ne dépasse jamais 15 % en valeur relative. Les deux courbes de célérité de groupe, par contre, sont très différentes tout en présentant la même forme.

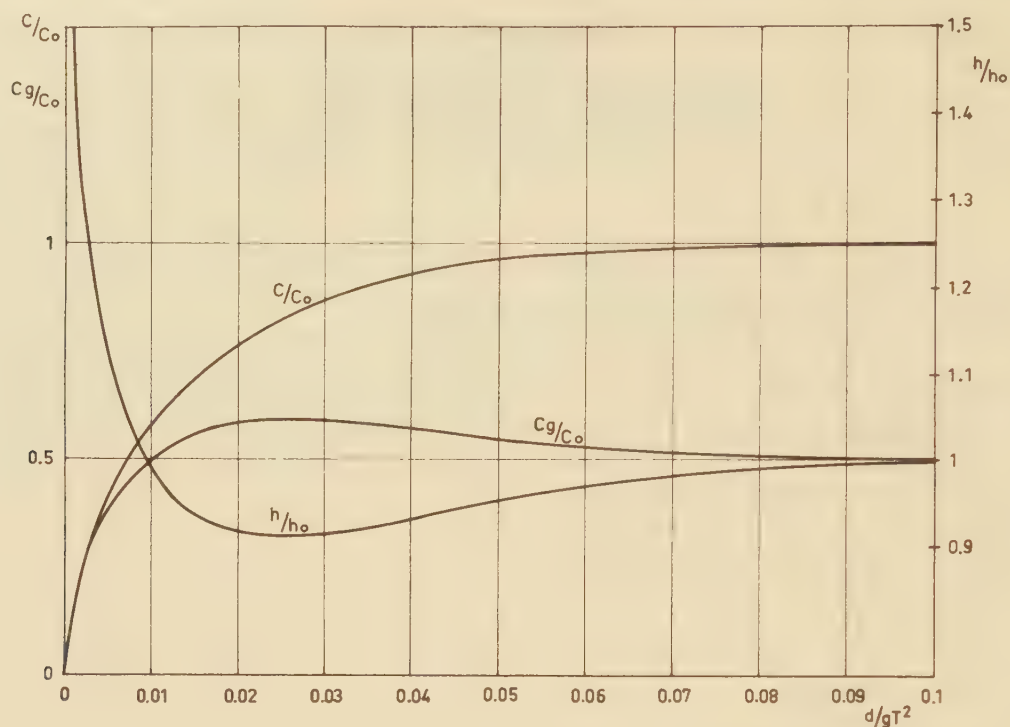


Figure 42 - Houle - Variation de l'amplitude et des vitesses de phase et de groupe en fonction de la profondeur.

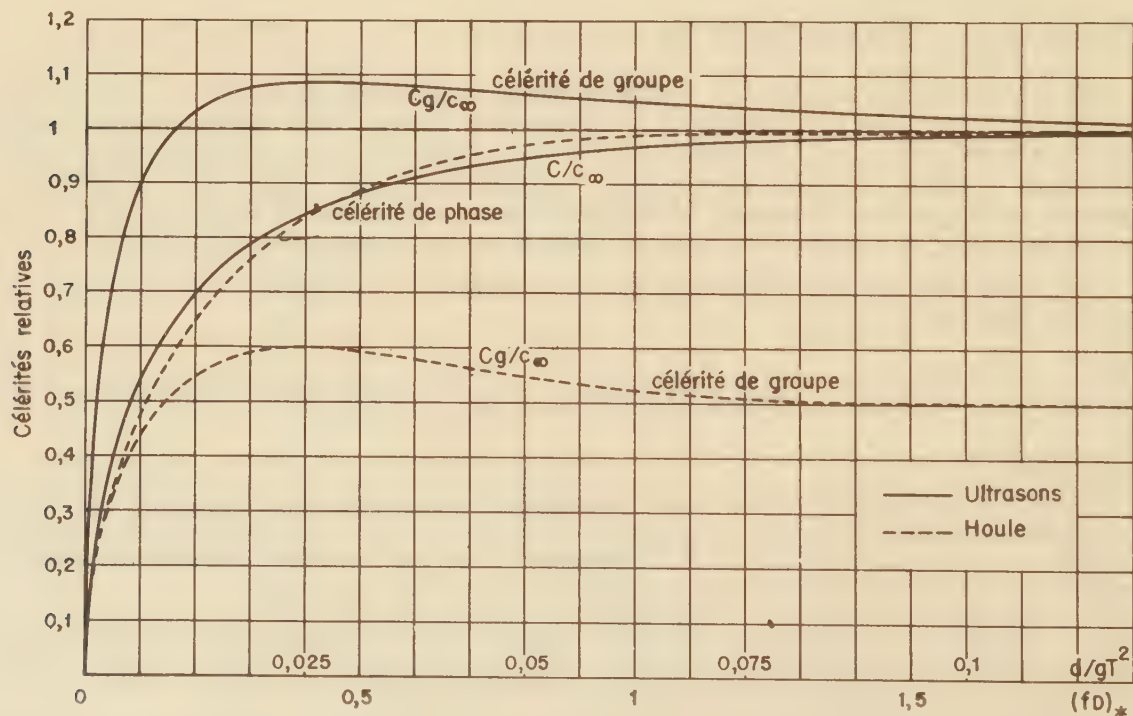


Figure 43 - Analogie houle-ondes de Lamb. Comparaison des courbes de variation des célérités de phase et de groupe en fonction de l'épaisseur et de la profondeur.

Tableau 14

Houle

Variation de l'amplitude et des vitesses de phase et de groupe
en fonction de la profondeur

d/gT^2	C/C_0	C_g/C_0	h/h_0
0,1000	0,9993	0,5026	0,9975
0,0975	0,9991	0,5030	0,9970
0,0950	0,9989	0,5036	0,9965
0,0925	0,9986	0,5042	0,9958
0,0900	0,9984	0,5049	0,9951
0,0875	0,9981	0,5058	0,9942
0,0850	0,9976	0,5068	0,9932
0,0825	0,9971	0,5080	0,9921
0,0800	0,9965	0,5094	0,9907
0,0775	0,9957	0,5110	0,9892
0,0750	0,9948	0,5128	0,9874
0,0725	0,9937	0,5149	0,9854
0,0700	0,9924	0,5173	0,9832
0,0675	0,9908	0,5200	0,9806
0,0650	0,9889	0,5231	0,9777
0,0625	0,9867	0,5265	0,9745
0,0600	0,9839	0,5304	0,9709
0,0575	0,9808	0,5347	0,9670
0,0550	0,9769	0,5394	0,9628
0,0525	0,9722	0,5444	0,9583
0,0500	0,9668	0,5500	0,9535
0,0475	0,9605	0,5558	0,9484
0,0450	0,9530	0,5619	0,9432
0,0425	0,9442	0,5682	0,9380
0,0400	0,9341	0,5746	0,9328
0,0375	0,9222	0,5807	0,9278
0,0350	0,9088	0,5868	0,9231
0,0325	0,8931	0,5921	0,9190
0,0300	0,8751	0,5963	0,9158
0,0275	0,8540	0,5989	0,9137
0,0250	0,8300	0,5996	0,9130
0,0225	0,8029	0,5982	0,9143
0,0200	0,7716	0,5933	0,9183
0,0175	0,7347	0,5831	0,9256
0,0150	0,6930	0,5681	0,9378
0,0125	0,6444	0,5461	0,9569
0,0100	0,5866	0,5137	0,9863
0,0075	0,5175	0,4686	1,0335
0,0050	0,4290	0,4015	1,1145
0,0040	0,3863	0,3663	1,1665
0,0030	0,3368	0,3237	1,2410

Pour la houle, la célérité de groupe reste toujours inférieure à la célérité de phase et tend en profondeur infinie vers $C_0/2$; ce qui peut se traduire par l'image suivante : dans un train d'ondes, des ondes apparaissent à l'arrière du train et disparaissent à l'avant ; autrement dit, l'onde se déplace vers l'avant dans le train d'ondes.

Pour les ondes de Lamb, au contraire, la célérité de groupe est toujours supérieure à la célérité de phase et tend en profondeur infinie vers c_0 ; ce qui, en employant la même image que pour la houle, se traduit par : dans un train d'ondes, des ondes apparaissent à l'avant du train et disparaissent à l'arrière ; autrement dit, l'onde se déplace vers l'arrière dans un train d'ondes.

b - Amplitude

En conservant le même rapport entre les variables $(fd)_*$ et d/gT^2 que pour les célérités, nous avons tracé sur la figure 44 les deux courbes de variation de l'amplitude en fonction de l'épaisseur et de la profondeur.

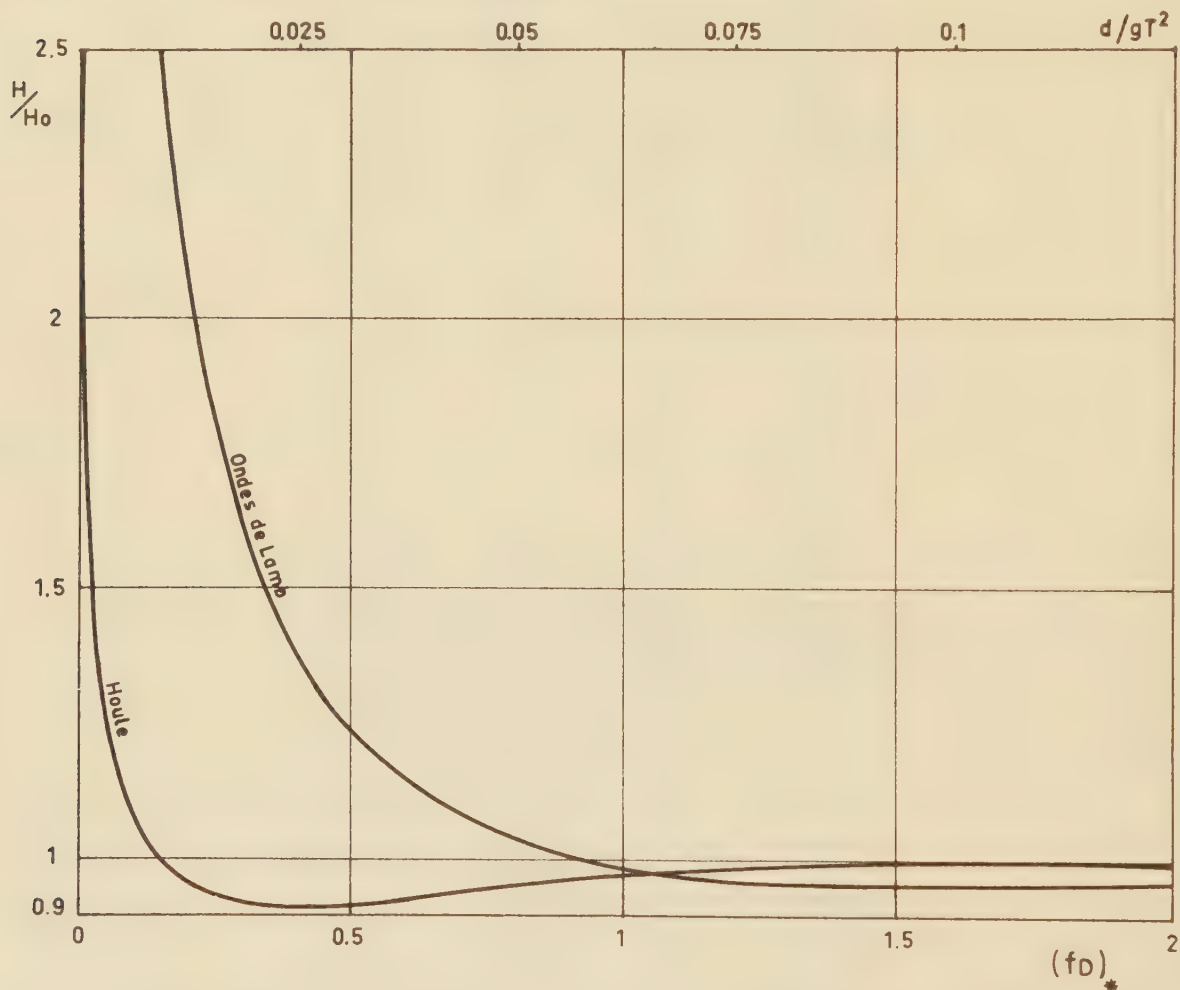


Figure 44 - Analogie houle-ondes de Lamb. Comparaison de la variation d'amplitude en fonction de la profondeur et de l'épaisseur.

On remarque que ces deux courbes, tout en ayant la même forme, diffèrent considérablement. Quand l'épaisseur décroît, l'amplitude des ondes de Lamb croît beaucoup plus vite et plus tôt que celle de la houle en fonction de la profondeur.

Cette différence a vraisemblablement deux causes : la première est le décalage des deux courbes de célérité de groupe ; la deuxième est que, pour les ondes de Lamb, les ellipses trajectoires des particules s'allongent verticalement quand l'épaisseur décroît alors que les trajectoires de la houle s'aplatissent.

3 - RELATIONS ANALOGIQUES

Les études théoriques et expérimentales montrent qu'il existe une certaine analogie de surface entre une onde cylindrique de flexion dans une plaque élastique et la houle cylindrique de première approximation. Ce qui entraîne, comme nous l'avons vu au chapitre IV, l'analogie des phénomènes de réfraction. Nous allons donc déterminer ci-après les relations analogiques liant les différents paramètres des deux phénomènes.

Les milieux en jeu sont supposés parfaits, c'est-à-dire que nous avons, d'une part, une onde purement élastique et, d'autre part, une onde de gravité pure, l'une et l'autre sans amortissement.

a - Equation en surface de l'onde de flexion

Nous avons vu (chapitre V) que, dans le cas de l'onde de flexion, les composantes horizontales et verticales u et v du déplacement d'une particule élémentaire de la surface de la plaque (celle-ci étant horizontale) sont données par :

$$\begin{cases} u = H U_s \cos(\omega t - \xi x) \\ v = H V_s \sin(\omega t - \xi x) \end{cases} \quad (1)$$

avec :

$$\begin{cases} U_s = \frac{2 R_s}{1 + R_s^2} \tanh \theta_s \\ V_s = 1 \end{cases}$$

b - Equation en surface de la houle

Les mêmes composantes du déplacement d'un point de la surface de l'eau, dans le cas de la houle de première approximation, s'écrivent :

$$\begin{cases} u_1 = -h U_1 \cos(\omega_1 t_1 - \xi_1 x_1) \\ v_1 = h V_1 \sin(\omega_1 t_1 - \xi_1 x_1) \end{cases} \quad (2)$$

avec :

$$\begin{cases} U_1 = \coth \frac{2\pi d}{L} \\ V_1 = 1 \end{cases}$$

c - Analogie théorique

On voit que les équations sont semblables pour les deux types d'ondes. Elles diffèrent cependant en deux points :

- les deux déplacements horizontaux sont déphasés de π l'un par rapport à l'autre ; les ellipses trajectoires des particules sont décrites dans deux sens opposés, à savoir : dans le sens trigonométrique pour l'onde de flexion, dans le sens des aiguilles d'une montre dans le cas de la houle, ceci pour une onde se propageant de gauche à droite ;
- le rapport U/V des axes des ellipses n'est pas le même pour les deux types d'onde ; dans le cas de l'onde de flexion, le grand axe est vertical et U/V décroît lorsque

l'épaisseur décroît ; dans le cas de la houle, le grand axe est horizontal et U/V croît lorsque la profondeur décroît.

Par contre, si l'on se limite au déplacement vertical v , les équations sont identiques :

$$\begin{array}{ll} \text{ondes élastiques : } v = H \sin(\omega t - \xi x) \\ \text{houle} & : v_1 = h \sin(\omega_1 t_1 - \xi_1 x_1) \end{array} \quad (3)$$

Dans ces équations, les quantités H , v , h , v_1 sont évidemment des valeurs relatives rapportées aux valeurs en profondeur et épaisseur infinies.

Il y aura correspondance exacte entre les deux déplacements si les deux relations suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 t_1 - \xi_1 x_1 = \omega t - \xi x \\ h = H \end{array} \right.$$

Pour obtenir une correspondance à la fois dans le temps et dans l'espace, la première relation doit être scindée en deux et l'on aboutit aux trois relations :

$$\begin{array}{l} \omega t = \omega_1 t_1 \\ \xi x = \xi_1 x_1 \\ H = h \end{array} \quad (4)$$

Trois échelles définissent l'analogie entre les deux phénomènes, ce sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_t = \frac{t}{t_1} = \text{échelle des temps} \\ E_1 = \frac{x}{x_1} = \text{échelle des longueurs ou échelle en plan} \\ E_h = \frac{D}{d} = \text{échelle des hauteurs} \end{array} \right.$$

En introduisant ces échelles dans les relations (4), on obtient :

$$\begin{array}{l} \frac{\omega_1}{\omega} = E_t \\ \frac{\Lambda}{L} = E_1 \end{array} \quad (5)$$

- le rapport des fréquences est l'inverse de l'échelle des temps ;
- le rapport des longueurs d'onde doit être égal en tout point à l'échelle en plan.

Cette dernière relation peut se décomposer en deux :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\Lambda_o}{L_o} &= E_1 \\ \frac{\Lambda}{\Lambda_o} &= \frac{L}{L_o}\end{aligned}} \quad (6)$$

ce qui peut s'énoncer ainsi :

- le rapport des longueurs d'onde en profondeur et épaisseur infinies est égal à l'échelle en plan;
- les lois de variation de la longueur d'onde (c'est-à-dire de la célérité de phase pour une période donnée), en fonction des quantités homologues profondeur et épaisseur (liées par l'échelle des hauteurs E_h), sont identiques.

En résumé, les relations d'analogie s'écrivent et s'énoncent ainsi :

$\frac{\omega_1}{\omega} = E_t$	→	rapport des fréquences égal à l'inverse de l'échelle des temps	(7)
$\frac{\Lambda_o}{L_o} = E_1$	→	rapport des longueurs d'onde en épaisseur et profondeur infinies égal à l'échelle en plan	(8)
$\frac{\Lambda}{\Lambda_o} = \frac{L}{L_o}$	→	lois de variation des longueurs d'onde identiques	(9)
$H = h$	→	lois de variation des amplitudes identiques	(10)

d - Analogie pratique

α) Relations (7) et (8)

La longueur d'onde en épaisseur infinie des ondes élastiques est donnée par :

$$\Lambda_o = \frac{c_R}{f}$$

c_R étant la célérité des ondes de Rayleigh, quantité liée au matériau constituant la plaque élastique.

La longueur d'onde en profondeur infinie de la houle est donnée par :

$$L_o = \frac{gT^2}{2\pi}$$

Les relations (7) et (8) s'écrivent donc :

$$\left| \begin{aligned}\frac{2\pi}{fT} &= E_t \\ \frac{2\pi c_R}{g f T^2} &= E_1\end{aligned} \right|$$

Elles relient les cinq paramètres E_1 , E_t , f , T , c_R .

Les deux paramètres E_t et f étant directement liés par la relation (7), on peut ramener le nombre des paramètres à quatre (E_1 , f , T , c_R) liés par une seule relation :

$$\boxed{\frac{2\pi}{g} \frac{c_R}{fT^2} = E_1} \quad (11)$$

On peut donc librement choisir trois de ces paramètres ; le quatrième sera alors fixé par cette relation de base.

Si, par exemple, on choisit la période de la houle T , le matériau élastique (c'est-à-dire le c_R) et l'échelle en plan E_1 , la fréquence de l'onde ultrasonore et l'échelle des temps seront données par :

$$\left| \begin{array}{l} f = \frac{2\pi c_R}{g E_1 T^2} \\ E_t = \frac{g T}{c_R} E_1 \end{array} \right.$$

β) Relation (9)

Nous avons vu au paragraphe précédent que les lois de variation de la célérité de phase des ondes de Lamb et de la houle en fonction respectivement de l'épaisseur et de la profondeur ne sont pas strictement identiques. La relation (9) ne peut donc pas être vérifiée exactement si l'on assure une correspondance linéaire entre la profondeur d et l'épaisseur D , en définissant une échelle des hauteurs E_h .

Pour vérifier exactement cette relation, nous allons donc établir une correspondance non linéaire entre d et D telle qu'en des points homologues les célérités relatives soient identiques. Cette correspondance est donc définie par :

$$\frac{c}{c_0} = \frac{C}{C_0} \longrightarrow (fD)_* = \text{fonction } (d/gT^2)$$

Le calcul numérique de cette fonction de correspondance a été effectué sur ordinateur CAB 500 à partir des valeurs des tableaux 5 et 14 pour un coefficient de Poisson $\nu = 0,33$.

Le résultat est consigné dans le tableau 15 et sur la figure 45.

On constate que, comme on pouvait s'y attendre, la courbe de correspondance est sensiblement linéaire tout au moins dans une gamme de profondeurs pas trop étendue.

Moyennant cette légère correction, la relation (9) est donc vérifiée, ce qui assure une correspondance exacte de forme et de position entre les crêtes de la houle en nature et celles des ondes de Lamb dans la plaque élastique homologue.

γ) Relation (10)

Cette relation (10) est destinée à ajouter à l'identité de distribution en phase des déplacements verticaux une identité de distribution en amplitude de ces mêmes déplacements.

Mais nous avons vu au paragraphe 2 que les lois de variation des amplitudes des ondes de Lamb et de la houle en fonction de $(fD)_*$ et d/gT^2 diffèrent quand les courbes de célérité de phase coïncident. La relation (10) ne peut donc être vérifiée. Il faut donc

faire intervenir un coefficient de correction K qui permette de passer de l'amplitude sur la plaque à l'amplitude en nature, ce coefficient K étant fonction du paramètre d/gT^2 . Nous aurons donc :

$$h = kH$$

Tableau 15

Analogie houle-ondes de Lamb ($\nu = 0,33$) : Correspondance profondeur-épaisseur et coefficient de correction d'amplitude

C/C_0	$(fD)_*$	d/gT^2	K	C/C_0	$(fD)_*$	d/gT^2	K
0,9993	2,7056	0,1014	1,0086	0,8449	0,4025	0,0265	0,6624
0,9974	2,1379	0,0841	1,0192	0,8361	0,3841	0,0256	0,6467
0,9954	1,8936	0,0764	1,0234	0,8270	0,3664	0,0247	0,6312
0,9913	1,6130	0,0682	1,0238	0,8175	0,3493	0,0238	0,6158
0,9872	1,4353	0,0631	1,0186	0,8078	0,3328	0,0230	0,6003
0,9828	1,3043	0,0590	1,0088	0,7977	0,3169	0,0221	0,5852
0,9784	1,2003	0,0559	0,9973	0,7872	0,3014	0,0212	0,5698
0,9738	1,1140	0,0533	0,9839	0,7764	0,2864	0,0204	0,5545
0,9691	1,0403	0,0510	0,9695	0,7651	0,2718	0,0196	0,5392
0,9642	0,9760	0,0489	0,9541	0,7535	0,2577	0,0187	0,5240
0,9591	0,9190	0,0470	0,9384	0,7414	0,2439	0,0179	0,5087
0,9540	0,8679	0,0453	0,9224	0,7288	0,2305	0,0171	0,4934
0,9486	0,8216	0,0437	0,9060	0,7157	0,2175	0,0163	0,4783
0,9431	0,7792	0,0422	0,8894	0,7020	0,2048	0,0155	0,4629
0,9374	0,7402	0,0408	0,8729	0,6878	0,1924	0,0147	0,4474
0,9315	0,7040	0,0394	0,8563	0,6729	0,1803	0,0139	0,4320
0,9255	0,6704	0,0382	0,8397	0,6574	0,1684	0,0131	0,4165
0,9192	0,6389	0,0369	0,8231	0,6411	0,1569	0,0123	0,4007
0,9128	0,6094	0,0357	0,8067	0,6241	0,1456	0,0116	0,3848
0,9062	0,5815	0,0346	0,7902	0,6061	0,1345	0,0108	0,3687
0,8993	0,5520	0,0334	0,7729	0,5872	0,1237	0,0100	0,3525
0,8923	0,5302	0,0324	0,7577	0,5672	0,1130	0,0093	0,3358
0,8850	0,5064	0,0313	0,7415	0,5460	0,1026	0,0085	0,3190
0,8775	0,4838	0,0303	0,7255	0,5234	0,0924	0,0077	0,3018
0,8697	0,4621	0,0293	0,7096	0,5116	0,0874	0,0073	0,2930
0,8617	0,4414	0,0284	0,6937	0,4993	0,0824	0,0069	0,2840
0,8534	0,4216	0,0274	0,6781	0,4866	0,0775	0,0065	0,2749

Ce coefficient a été calculé pour un coefficient de Poisson $\nu = 0,33$ à partir des tableaux 12 et 14 en respectant la loi de correspondance entre d et D définie au paragraphe précédent.

Le résultat est porté dans le tableau 15 et sur la figure 45.

4 - UTILISATION PRATIQUE - ABAQUE

Sur la figure 45, nous avons ajouté deux abaques le long des axes en d/gT^2 et $(fD)_*$, destinés à permettre une évaluation rapide de la correspondance entre d et D et du coefficient de correction d'amplitude en fonction de la période de la houle et de la célérité c_s des ondes transversales dans le matériau élastique. Cet abaque est valable pour une

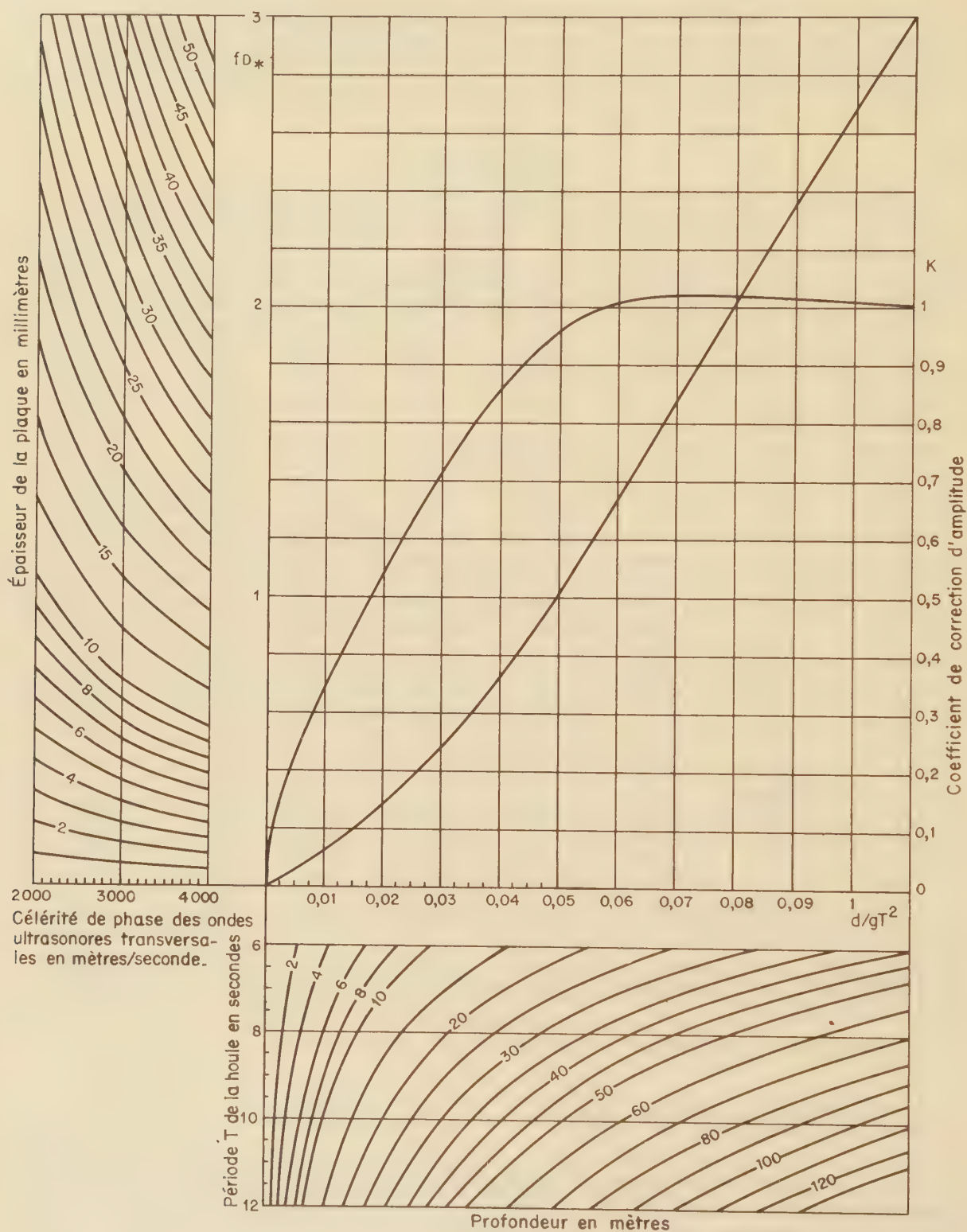


Figure 45 - Courbe de correspondance entre $(fd)_*$ et d/gT^2 et correction d'amplitude. Abaques de correspondance profondeur - épaisseur pour $f = 215$ kHz.

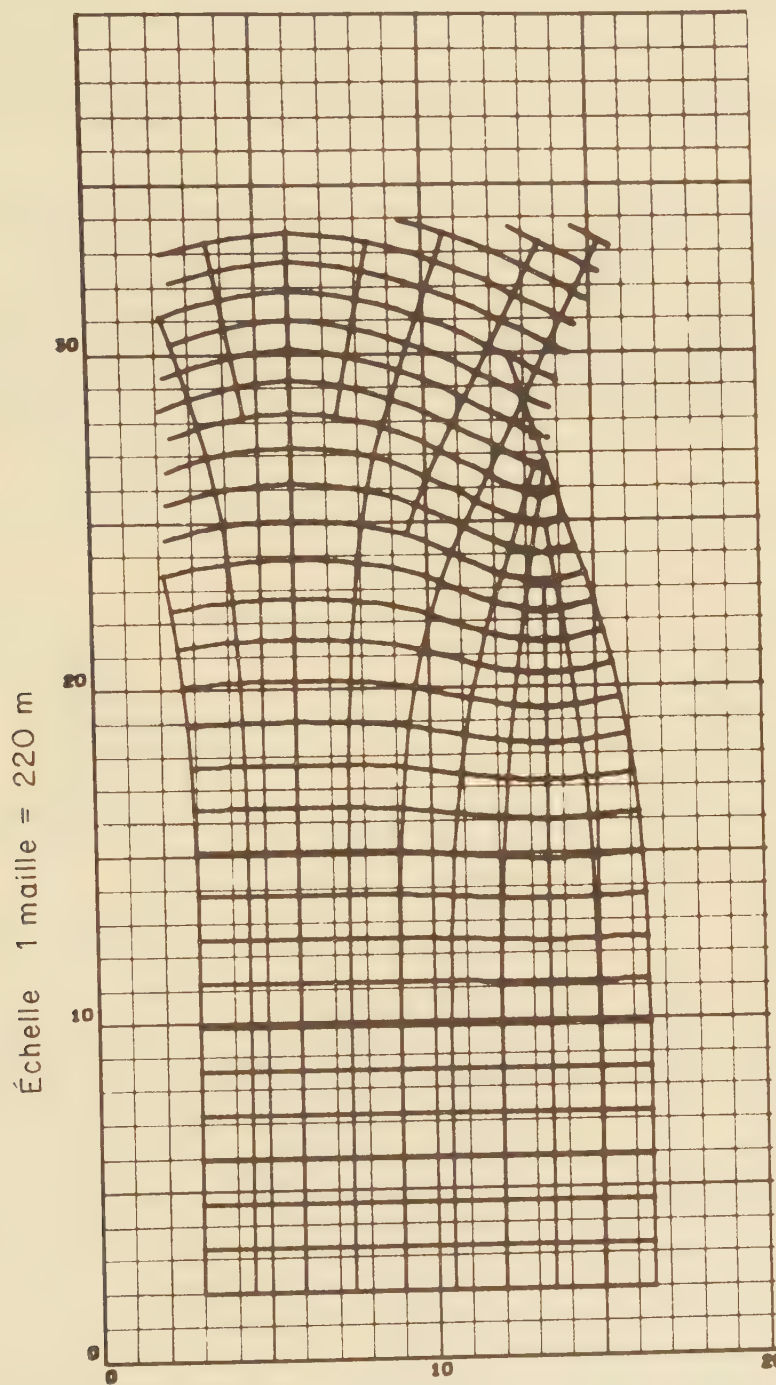


Figure 46 - Houle - Plan de vagues calculé numériquement - Sortie S.C. 4020.

fréquence des ondes ultrasonores de 215 kHz, fréquence utilisée dans notre montage expérimental.

5 - DÉTERMINATION DES FONDS NATURE CORRESPONDANT À LA PLAQUE EXPÉRIMENTALE TAILLÉE DU CHAPITRE VIII.- PLAN DE VAGUES PAR LE CALCUL NUMÉRIQUE

Dans le but de vérifier les relations analogiques, la loi de correspondance entre d et D et la valeur du coefficient de correction d'amplitude K, nous avons déterminé les fonds nature analogues à la plaque expérimentale taillée du chapitre VIII.

Parmi les quatre paramètres de l'analogie, deux nous sont imposés par les conditions de l'expérience : d'une part, la fréquence égale à 215 kHz, d'autre part, le matériau (du duralumin) dont le c_s est de 3200 m/s et le c_R de 2980 m/s. Nous pouvons donc choisir un paramètre. Prenons la période de la houle égale à 10 secondes. L'échelle en plan est alors déterminée par :

$$E_1 = \frac{2\pi}{g} \frac{c_R}{fT^2} \# \frac{1}{11\,000}$$

Tableau 16

Analogie houle-onde de Lamb
Correspondance profondeur réelle - épaisseur de la plaque
(Echelle 1/11 000, T = 10 s, f = 215 kHz, $C_s = 3\,200$ m/s)

Profondeur d en m	d/gT^2	$(fD)_*$	Epaisseur D en mm
10	0,0102	0,126	1,875
10,6	0,0108	0,134	2,00
12	0,01225	0,156	2,32
14	0,01425	0,185	2,75
16	0,0163	0,217	3,22
18	0,01835	0,251	3,74
20	0,0204	0,287	4,26
22	0,0224	0,327	4,86
24	0,0245	0,362	5,38
26	0,0265	0,402	5,98
28	0,0287	0,449	6,68
30	0,0306	0,490	7,29
32	0,0326	0,535	7,95
34	0,0347	0,584	8,69
36	0,0367	0,634	9,43
37,6	0,0383	0,673	10
38	0,0387	0,685	10,2

Compte tenu de ces valeurs des paramètres, nous avons déterminé la correspondance entre l'épaisseur D de la plaque et la profondeur d nature (cf. tableau 16). Nous avons ainsi obtenu la carte des fonds nature analogues à la plaque taillée (cf. les lignes de niveau sur la figure 47). Le plan de vagues correspondant, obtenu par le programme de calcul numérique dont nous avons parlé au chapitre II, fait l'objet des figures 46 et 47. Les amplitudes sont exprimées en valeurs relatives par rapport à l'amplitude en profondeur

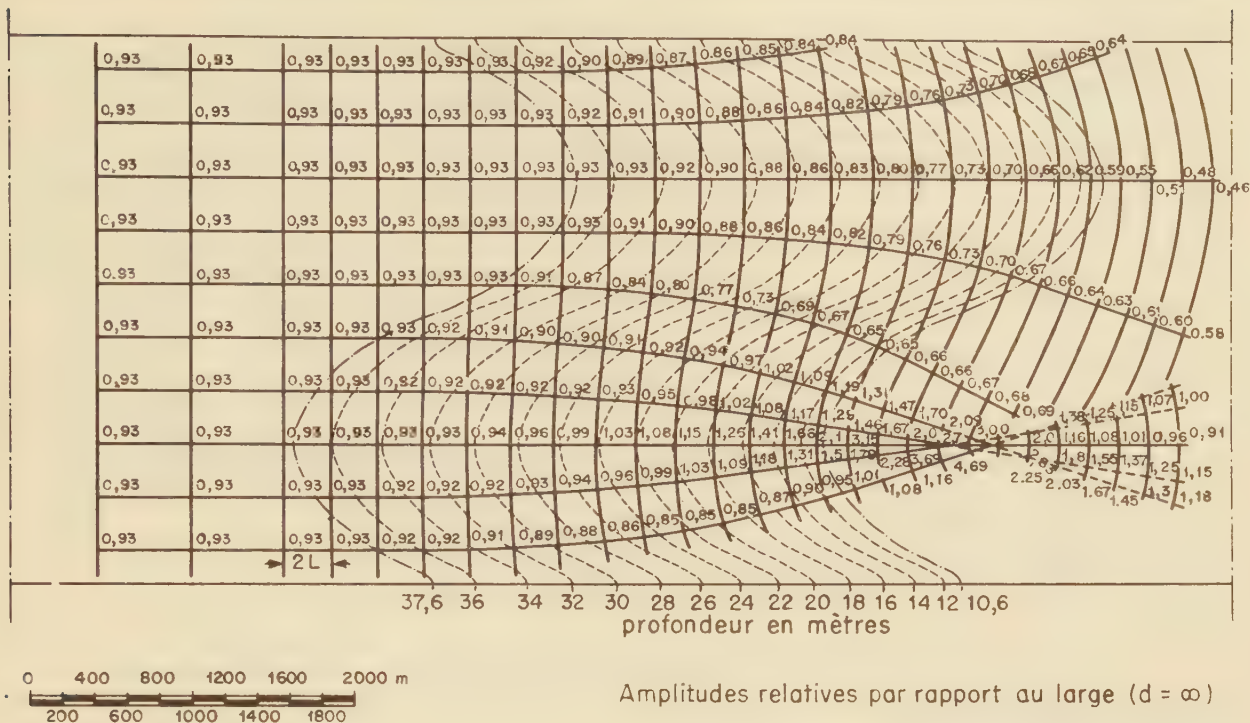


Figure 47 - Fonds réels correspondants à la plaque sculptée. Plan de vagues obtenu par le calcul numérique. Période de la houle $T = 10$ secondes.

infinie. Pour les comparer à celles obtenues expérimentalement, nous les avons converties en valeurs relatives par rapport à la crête de départ (figure 48).

6 - COMPARAISON : EXPÉRIENCE - CALCUL NUMÉRIQUE

a - Phase - Forme des crêtes

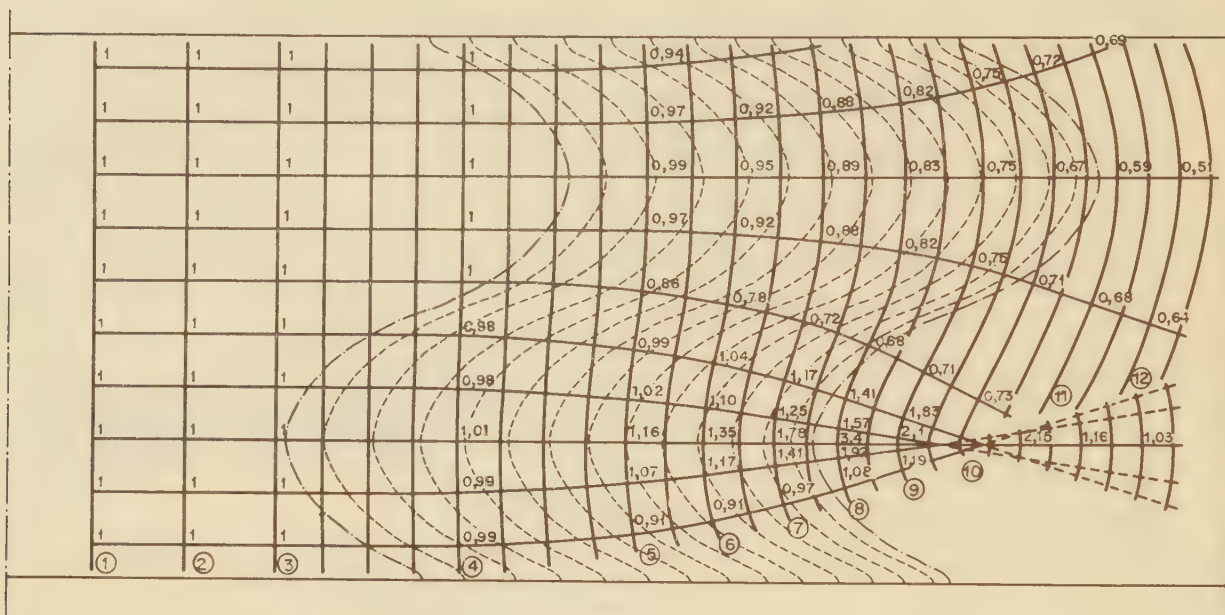
La comparaison entre la figure 48 donnant le résultat du plan de vagues par calcul numérique et la figure 38 donnant le résultat du relevé du plan de vagues ultrasonore analogue montre une bonne concordance. La déformation des crêtes est identique en tout point et les points de convergence coïncident.

On constate seulement un léger glissement des crêtes les unes par rapport aux autres au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la crête de départ. Ce décalage s'explique par une erreur de l'ordre de 2 % sur la correspondance des célérités.

b - Amplitudes

En ce qui concerne les amplitudes, on constate qu'elles ne coïncident pas, comme prévu.

Nous avons donc fait intervenir le coefficient de correction d'amplitude. Les amplitudes relevées sur la plaque expérimentale ont été corrigées et ramenées en valeurs relatives par rapport à la nouvelle amplitude sur la crête de départ. Ces nouvelles amplitudes sont reportées sur la figure 49 ; on constate qu'elles sont très comparables à celles obtenues par le calcul numérique (figure 48). L'écart en valeur relative est en général inférieur à 10 % ; en quelques points seulement il atteint 25 %.



Amplitudes relatives par rapport à la crête de départ

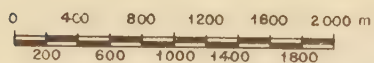


Figure 48 - Houle. Plan de vagues calculé numériquement.

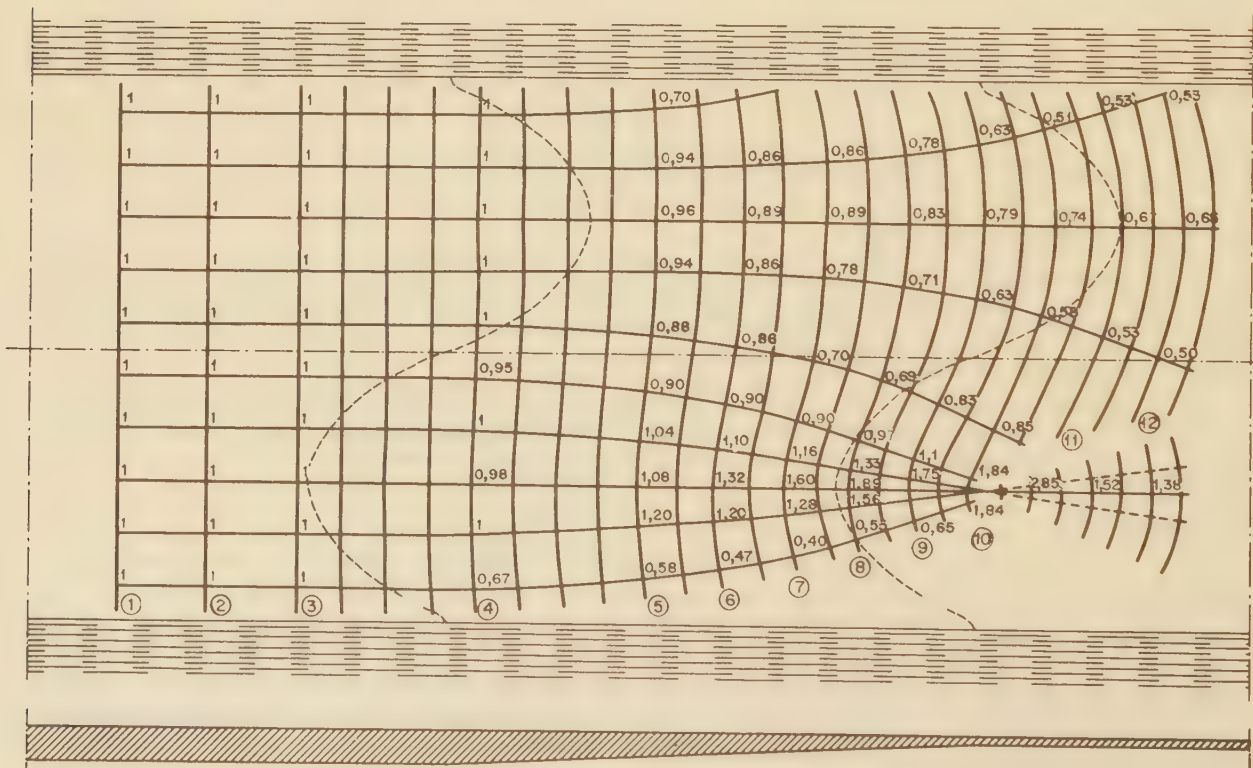


Figure 49 - Ultrasons. Plans de vagues : amplitudes corrigées.

Pour "visualiser" cet écart, nous avons réalisé la figure 50 sur laquelle nous avons porté :

- la courbe théorique de variation du coefficient de correction d'amplitude rapporté à sa valeur sur la crête de départ ; c'est en effet ce coefficient qui permet théoriquement de passer directement des amplitudes de la figure 38 (expérience) à celles de la figure 48 (calcul numérique) ;
- les valeurs du rapport des amplitudes mesurées et calculées en des points homologues des figures 38 et 48 ;
- les valeurs moyennes de ces rapports sur des intervalles de 0,0025 en d/gT^2 .

On peut en déduire une bonne concordance entre la théorie et l'expérience et en particulier que l'expérience de la plaque taillée vérifie bien la courbe théorique de variation de l'amplitude des ondes de Lamb en fonction de l'épaisseur.

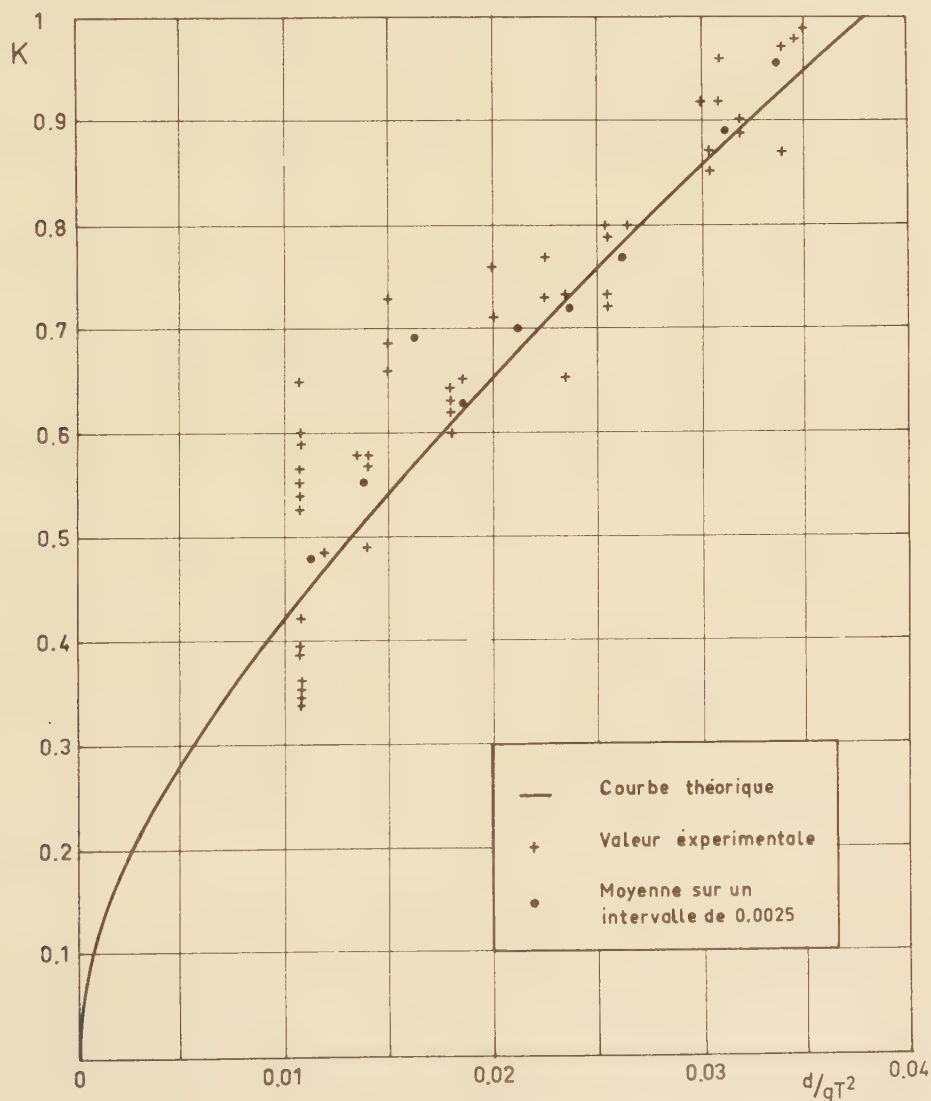


Figure 50 - Analogie houle-ondes de Lamb. Coefficient de correction d'amplitude courbe théorique et valeurs expérimentales.

c - Conclusion

L'expérience de la plaque taillée, jointe au calcul numérique du plan de vagues dans un site naturel déduit de la plaque par les relations analogiques, a permis de vérifier l'exactitude des lois théoriques régissant la propagation des ondes de Lamb et la possibilité de faire correspondre un plan de houle et un plan d'onde ultrasonore moyennant une correspondance non linéaire entre la profondeur nature et l'épaisseur modèle et une correction d'amplitude.

CONCLUSION

Au départ, deux voies différentes s'offraient à nous pour réaliser une analogie entre la houle et les ultrasons. La première était d'assurer une analogie théorique exacte en travaillant en milieu liquide, où la célérité des ultrasons est constante, ce qui permet de reproduire avec exactitude la réflexion et la diffraction de la houle en profondeur constante ; la deuxième était de chercher un type d'ondes ultrasonores de célérité variable en fonction d'une des dimensions d'un milieu fini pour reproduire la variation de célérité de la houle en fonction de la profondeur, quitte à se tourner vers une analogie empirique approchée.

Nous avons choisi cette deuxième voie parce qu'elle nous permettait de tenter de reproduire le phénomène de réfraction de la houle.

C'est pourquoi nous avons étudié théoriquement et expérimentalement les ondes de Lamb de premier mode asymétrique dans une plaque élastique.

Nous avons rencontré de multiples difficultés pour produire expérimentalement une onde plane continue de ce type. Les plus sérieuses étaient dues à la formation d'ondes stationnaires dans la cuve émettrice et à la production simultanée de plusieurs modes d'ondes de Lamb.

Après bien des tâtonnements, nous sommes arrivés à produire un champ acceptable, quoique loin d'être parfait.

Pour poursuivre cette étude, l'obtention d'un champ plan de meilleure qualité serait un des premiers buts à atteindre.

Nous avons pu vérifier avec une exactitude suffisante les lois de propagation des ondes de Lamb et en particulier la loi de variation de l'amplitude en fonction de l'épaisseur, loi que nous avons établie théoriquement en supposant que, comme pour la houle, il n'y a pas de transfert d'énergie à travers les orthogonales aux fronts d'ondes.

Enfin, nous avons pu réaliser, sur une plaque d'épaisseur variable, un plan de vagues ultrasonore qui s'est révélé identique à celui d'une houle analogue établi par le calcul numérique.

Les ondes de Lamb que nous avons utilisées peuvent donc permettre de réaliser l'analogie du phénomène de réfraction de la houle.

Ce résultat est intéressant dans la mesure où l'on peut espérer pouvoir réaliser également, avec ces mêmes ondes, l'analogie des phénomènes de réflexion et de diffraction. Cela est théoriquement possible en imposant une condition aux limites qui annule la composante horizontale du déplacement des particules de la plaque sans annuler la composante verticale. Mais expérimentalement cela semble délicat. En tout cas, nous pensons que c'est dans cette voie qu'il serait intéressant de poursuivre l'étude de cette analogie.

Une autre voie intéressante à explorer est celle que nous avons volontairement laissée de côté, c'est-à-dire la réalisation de l'analogie théorique exacte en profondeur constante. Il existe en effet des cas, comme par exemple l'étude de la diffraction ou des seiches dans un bassin de port dragué à niveau constant, où la réfraction ne joue pas de rôle, mais où, par contre, il est nécessaire de reproduire fidèlement les phénomènes de réflexion et de diffraction.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] MUNK (W.H.), ARTHUR (R.S.) - *Wave intensity along a refracted ray. Gravity Waves* - U.S. Dep. of Commerce N.B.S. circular 521, p. 95 - 108, 5 fig., 15 réf. bibli.
- [2] GRISWOLD (G.M.) - Numerical calculation of wave refraction. *J. of Geophysical Research*, vol. 68, n° 6, mars 1963, p. 1715 - 1723, 8 fig., 4 réf. bibli.
- [3] CRAWFORD (A.E.) - *Technique des ultrasons*. Traduit par J. Palme, Dunod, Paris, 1959, 450 p.
- [4] STOKES (G.G.) - *Trans. Camb. Phil. Soc.* 8 (1849).
- [5] KIRCHHOFF (G.) - *Ann. Phys. Lpz.*(1868).
- [6] DAVIS (A.H.) - The analogy between ripples and acoustical wave phenomena. *Proc. of Phys. Soc. of London*, vol. 38, 1925, p. 234 - 246, 6 fig., 25 réf. bibli.
- [7] DAVIS (A.H.) - Some acoustical phenomena illustrated by ripples transmission through quinke filters, cuwed conduits and vibrating partitions. *Proc. of Phys. Soc. of London*, vol. 11, 1927, p. 90 - 94, 2 fig.
- [8] KOLSKY (H.) - *Stress waves in solids*. Oxford, Clarendon Press, 1953.
- [9] Lord RAYLEIGH - *Theorie of sound*, Dover Publications, New-York, 1945.
- [10] Lord RAYLEIGH - On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proc. of London Math. Soc.*, 1885 vol. 17 p. 4 - 11.
- [11] LAMB (H.) - On waves in an elastic plate. *Proc. of Roy. Soc. of London*, série A, vol. 93, 1917, p. 114 - 128.
- [12] SATO (Y.) - Study of surface waves. II. Velocity of surface waves propagated upon elastic plates. *Bull. Earthq. Res. Inst.* 29 - 223 - 26 - 1954, p. 223 - 261, 12 fig., 19 réf. bibli.
- [13] GRIGSBY (T.N.), TAJCHMAN (E.J.) - Properties of Lamb waves relevant to the ultrasonic inspection of thin plates. *I.R.E. Transactions on Ultrasonics Engineering*, mars 1961, vol. 8, n° 1, p. 26 - 33, 6 fig., 21 ref. bibli.
- [14] COOK (E.G.), VAN VALKENBURG (H.E.) - Surface waves at ultrasonic frequencies *Amer. Soc. for Test. Mat. Bull.*, mai 1954, n° 198, p. 81 - 84, 9 fig. 12 réf. bibli.
- [15] DE NOYER (J.) - Determination of the energy in body and surface waves. *Bull. Seism. Soc. Amer*, 1958, n° 48, p. 355 - 368.
- [16] VIKTOROV (I.A.) - Investigation of methods for exciting Rayleigh waves. *Soviet Physics Acoustics*, vol. 7, n° 3, janvier - mars 1962. Translated from *Akusticheskii Zhurnal* vol. 7, n° 3, 1961.

- [17] FIRESTONE (F.A.) and LING (D.S.) - Methods and means of generating and utilizing vibrational waves in plates - *U.S. patent n° 2*, 536, 128, janvier 1951, 17 fig.
- [18] WORLTON (D.C.) - Experimental confirmation of Lamb waves at megacycles frequencies. *J. of Applied Physics U.S.A.*, 1961, 32 n° 6, p. 967 - 971.
- [19] WILSON (R.) - Recent developments in the ultrasonic inspection of thin metallic sheet or plate. *Sheet Metal Industries*, n° 320, vol. 30, février 1953.
- [20] NAKAMURA (K.) - Ondes de mode normal dans une plaque élastique. *Science Reports of the Tohoku University*, série 5, Geophysics, vol. 12 n° 3, mars 1961.
- [21] TOLSTOY (I.), USDIN (E.) - Wave propagation in elastic plates : low and high mode dispersion. *J. of Acoust. Soc. of Amer.* vol. 29, n° 1, janvier 1957, p. 37 - 41.
- [22] BINCEWSKY (G.J.) - Standardization and application of ultrasonic surface wave inspection. *J. of the Society for Nondestructive Testing*, juillet - août 1957.
- [23] WORLTON (D.C.) - Ultrasonic testing with Lamb waves. *J. of the Society for Nondestructive Testing*, juillet - août 1957.
- [24] FREDERICK WORLTON (D.C.) - Ultrasonic thickness measurements with Lamb waves. *Nondestructive Testing*, 20, n° 1, 1962, p. 51 - 55.
- [25] LYAMSHEV (L.M.), RUDAKOV (S.N.) - Sound radiation from plates and shells in water. *Soviet Physics Acoustics*, vol. 7, n° 3, janvier - mars 1962. Translated from *Akusticheskii Zhurnal*.
- [26] VIKTOROV (I.A.) - Rayleigh waves in the ultrasonic range - *Soviet Physics Acoustics*, vol. 8, n° 2, octobre - décembre 1962, p. 118 - 120, 11 fig., 37 réf. bibli. Translated from *Akusticheskii Zhurnal*.
- [27] VINOGRADOV (K.N.), UL'YANOV (G.K.) - Measurement of the velocity and attenuation of ultrasonic surface waves in hard materials. *Soviet Physics Acoustics*, vol. 5, n° 3, février 1960, p. 296 - 299, 6 fig., 6 réf. bibli.
- [28] PRESS (F.), HEALY (J.) - Absorption of Rayleigh waves in low-loss media - *J. of Applied Physics*, vol. 28, n° 11, novembre 1957, p. 1323 - 1325, 2 fig., 5 réf. bibli.
- [29] BYKOV (N.S.), SCHNEIDER (Yu. G.) - Experimental study of the effect of surface quality on the damping of surface waves - *Soviet Physics Acoustics*, vol. 6, 1960, p. 500.
- [30] BREKHOVSKIKH (L.M.) - Propagation of surface Rayleigh waves along the uneven boundary of an elastic body - *Soviet Physics Acoustic*, vol. 5, n° 3, février 1960, p. 288 - 295, 2 fig., 5 réf. bibli.
- [31] VIKTOROV (I.A.) - Some aspects of the propagation of Rayleigh waves in solids - (dissertation) *Akusticheskii inst. AN. SSSR*, 1958.
- [32] MEITZLER (A.H.) - Selective attenuation of elastic wave motions in strips of polycrystalline metals, *J. of the Acoust. Soc. of Amer.*, vol. 34, n° 4, avril 1962, p. 444 - 453, 9 fig., 23 réf. bibli.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

"CALCUL NUMÉRIQUE EN MÉCANIQUE DES FLUIDES"

Vu et approuvé

Paris, le 3 Mai 1968

Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

Marc. ZAMANSKY

Vu

et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris
Jean ROCHE

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN

Publications scientifiques et littéraires

TYPO - OFFSET

05 - GAP - Téléphone 14-23/14-24

Dépot légal : n° 350 - 1968

